

SÍLVIO R. DAHMEN

RELATIVIDADE GERAL

TEORIA E APLICAÇÕES

Hypothesen sind Netze, nur der wird fangen, der auswirft.

Hipóteses são redes: só pega algo quem as lança.

Novalis (Friedrich v. Hardenberg, 1772-1801)



Dancing with Gravity. © Laurent Taudin, com permissão do autor.

Copyright © 2022 por S.R. Dahmen

S.R. DAHMEN
INSTITUTO DE FÍSICA
UFRGS

Versão de Novembro 2022

Acerca destas notas de aula

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) nasce como uma extensão natural da Teoria Especial, através da tentativa de Einstein de entender, dentro de um contexto mais amplo, o papel de referenciais não inerciais nas leis da Física. No entanto, fosse simplesmente pelo seu nome, seria difícil associá-la àquilo que ela realmente é, ou melhor, aquilo que ela se tornou pelas mãos de Einstein: uma teoria da gravitação, ou seja, uma teoria física de sistemas em grandes escalas, sejam eles sistemas planetários, galáxias ou o Universo como um todo. Embora o nome pouco diga sobre a teoria, há uma razão histórica para que TRG seja assim chamada: em 1907 Einstein foi convidado por Johannes Stark a escrever um artigo de revisão sobre sua teoria de 1905, a Teoria da Relatividade Especial ou Restrita (TRE ou TRR), que relaciona distâncias e intervalos de tempo em um referencial inercial com as mesmas medidas em referenciais que se movem com velocidade constante e são portanto inerciais também. Motivado por este trabalho, Einstein começou a pensar mais aprofundadamente sobre o papel dos referenciais em Física, em particular na extensão de sua teoria *especial* para referenciais não inerciais, ou seja, uma teoria da relatividade *generalizada*. Ao longo deste processo, que teve início em 1907 e culminou com sua teoria em 1915, Einstein teve – nas suas próprias palavras – a ideia mais feliz da sua vida: a de que o campo gravitacional era, ao menos numa região suficientemente pequena do espaço, totalmente equivalente a um referencial inercial no qual não atuam quaisquer forças mas que se move em um espaço curvo. Segundo esta ideia revolucionária de Einstein, não existe força de gravidade: o que existe é a curvatura do espaço-tempo, curvatura esta causada pela presença de massa e energia. Obviamente uma mudança tão radical na nossa visão de mundo, de que dois conceitos que tomamos por evidentes – tempo e espaço – são na verdade afetados pelos objetos neles contidos, tem consequências para a Física como um todo, uma vez que tomamos estes mesmos conceitos como a tecitura, o pano de fundo ou palco onde a Física se desenrola. Embora as consequências desta nova visão sejam muito profundas do ponto de vista epistemológico, não se trata de uma questão puramente “filosófica” ou, se preferirmos, de um ponto de vista: a TRG é uma teoria experimentalmente verificada e negá-la significa negar uma grande quantidade de *fatos experimentais* que a corroboram. Não existe ainda uma teoria que a suplante, embora haja ainda muitas questões em aberto.

Com os fantásticos avanços da Astrofísica e da Cosmologia das últimas décadas, a Teoria da Relatividade Geral tornar-se-á em breve – assim ao menos espero – um curso obrigatório nos currículos de Física: termos como Big Bang, Matéria e Energia escuras, Buracos Negros e Expansão do Universo já adquiriram vida própria fora dos ambientes puramente acadêmicos. Não conhecê-la significa abdicar de uma prerrogativa que temos enquanto físicos, deixando que pessoas menos capacitadas ocupem este espaço e propaguem teorias que carecem de fundamento lógico e factual. Significa também deixar de ter contato *com uma das mais belas teorias da física* , nas palavras do físico russo Lev D. Landau.

Este avanço rápido tem um lado negativo: até há poucos anos a Relatividade Geral era ensinada em cursos de pós-graduação e, com raríssimas exceções, não fazia parte dos cursos de graduação. Como consequência

o *corpus* de livros sobre o assunto é muito heterogêneo em sua profundidade e abrangência, embora seja possível distinguir, em linhas gerais, três tipos de textos:

- (i) livros que adotam a linguagem matemática mais abstrata de formas multilineares (representação tensorial sem índices), muito semelhante à notação de Dirac da mecânica quântica. A consequência desta escolha faz com que não tenhamos uma visão muito clara do que a física assim descrita representa. Uma vez que na TRG lidamos com espaços curvos quadridimensionais curvas, falta-nos a intuição geométrica do que realmente está acontecendo. Em sua grande maioria são excelentes livros, como Grøn e Hervik, Straumann e o famoso MTW (Misner, Thorne e Wheeler), mas acredito que só podem ser aproveitados depois de já termos tido contato com a TRG em moldes mais tradicionais.
- (ii) Há também livros que, em contraposição aos descritos acima, procuram manter a linguagem tensorial usual, buscando assim não sobrecarregar o leitor com a dificuldade extra de uma linguagem matemática com a qual não está habituado. Há um grande número de clássicos nesta categoria: os livros de Landau e Lifshitz, Weinberg, D’Inverno, Rindler, Foster e Nightingale, apenas para citar alguns. Estes livros são, na minha opinião, os mais apropriados para o primeiro contato com a teoria.
- (iii) Finalmente há obras mais antigas escritas por físicos que tiveram contato direto com Einstein ou participaram ativamente do desenvolvimento da teoria: Max von Laue, amigo de Einstein e relativista de primeira hora, Vladimir Fock, o *doyen* da TRG na União Soviética, Christian Møller, Arthur Eddington (que introduziu a Relatividade ao mundo anglofônico), Richard C. Tolman ou John L. Synge. Embora desatualizados sob muitos aspectos, estes livros têm nisto justamente seu diferencial: sendo de uma época onde muitas das previsões da TRG eram ainda vistos com ceticismo, há uma grande ênfase no entendimento mais profundo da física em si e em seus resultados.

Mas fica a pergunta: como estudar a TRG? Uma vez que ela vai vai contra nosso “senso comum”, talvez a melhor maneira de abordá-la, didaticamente falando, seja aquela exposta pelo filósofo alemão Karl Jaspers em sua obra *Os grandes filósofos*. Nela, Jaspers tenta mostrar o que é exatamente a filosofia enquanto área do conhecimento, seus métodos e como ela foi sendo paulatinamente definida e circunscrita no seu escopo. Para atingir seu objetivo Jaspers propugna uma abordagem que consiste em *cinco aspectos* que o leitor deve ter diante de si quando decide estudar mais aprofundadamente um assunto. Nas palavras de Jaspers:

O primeiro é o aspecto histórico: seguindo as indicações cronológicas e geográficas tento imaginar as diferentes épocas da história. Elas se nos apresentam com diferentes faces e mudanças insondáveis no modo de pensar. Compreendemos pouco suas origens bem como as sempre mutáveis condições da vida dos pensadores, [condições estas] ditadas pelas circunstâncias naturais e pelo estado de sua sociedade. As premissas e modos de pensar típicos de uma época se nos mostram como vestimentas históricas de perguntas imorredouras. O segundo aspecto é o fatural: volto-me às questões e aos sistemas de pensamento, ouço a história, quais perguntas foram postas, quais respostas foram encontradas, sem considerar seu ordenamento temporal. Consigo deste modo sistematizar aquilo que se tornou objeto do inquirir filosófico. Em terceiro lugar temos o aspecto genético: é na mitologia, na religião, na literatura e na língua que encontro a origem da filosofia, seja em seus primórdios ou em qualquer outra época. A fonte basilar da filosofia está de certo modo em uma ou outra [destas áreas], da quais às vezes se aproxima ou contra quem muitas vezes se posiciona. O quarto aspecto é o prático: eu consigo ver a materialização da filosofia na prática de

*vida, quais consequências ela traz e como é por ela condicionada. Finalmente temos o aspecto dinâmico: torno-me consciente do espaço de “forças” através das quais, pelo ato filosófico, a guerra de ideias ocorre e não se esvai com o tempo. Os grandes sistemas unificadores da filosofia nos dão a aparência de uma conclusão, mas a guerra novamente irrompe e se apresenta sob nova forma. Uma vez que eu não consigo chegar a um ponto de vista fora deste embate, vejo-me como parte dele, baseado na maneira como interpreto estas forças e as polêmicas que elas suscitam.*¹

¹ Karl Jaspers, *Die Grossen Philosophen*, Bd. 1, R. Piper & Co. Verlag, Munique, 1991. Existe uma tradução desta obra para o inglês mas, ao contrário da edição alemã completa de 968 páginas, a edição em língua inglesa foi dividida em vários volumes.

Trazendo as idéias de Jaspers para o campo da Física, podemos resumir o método da seguinte forma: para entender a teoria precisamos primeiro de seu fundamento *histórico*, ou seja da clara a noção que as questões que tratamos advém de uma sequência contínua de questionamentos que remontam a um passado longínquo, de visões de mundo cujas origens estão em grande parte perdidas no passado – o fundamento *genético* – e que parecem não ter relação com as questões a nós postas. Disto surge o fundamento *fatual*: perguntas concretas baseadas em fatos observados cujas respostas se encontram dentro de um contexto ditado pelas circunstâncias e meios disponíveis para os cientistas que com elas se ocuparam em diferentes épocas. Isto leva ao desenvolvimento de um aparato matemático, de um modo de questionamento – em suma, de um *modus operandi* – que constitui o fundamento *prático* da ciência e traz em seu bojo a circunscrição do escopo e metodologia daquilo que hoje definimos como sendo Física em particular e Ciência de um modo geral. Além disto, esta dissociação de temas se dá de forma dinâmica, ou seja, quando imaginávamos que tínhamos um grande sistema unificador como a Mecânica, que tomávamos como base de toda a Física conhecida, surge uma teoria como a Eletrodinâmica que traz em seu bojo resultados que notadamente contrariam fundamentos até então tidos como sólidos. O fundamento *dinâmico* é essencial a toda ciência, pois ele permite a substituição total ou parcial de teorias pelos surgimento de novos fatos experimentais. Este embate de forças que, em nosso caso nosso específico, foi a questão da incompatibilidade das Equações de Maxwell com as transformações de Galileu, levam à ruptura das amarras da visão newtoniana do espaço e do tempo, lançando as bases de uma nova física. Estes aspectos se entrelaçam, se digladiam e se auxiliam mutuamente, sendo difícil muitas vezes pensar neles separadamente.

Com isto em mente, estas notas foram escritas com o intuito de oferecer uma porta de entrada à Relatividade Geral, apresentando-a como algo orgânico, que surgiu não extemporaneamente mas sim como consequência inevitável de vários questionamentos sobre os fundamentos da Física. Para que estas notas tenha o efeito desejado, é importante um feedback de todos vocês, a quem agradeço antecipadamente quaisquer sugestões que visem tornar este texto melhor. Devo também expressar meu agradecimento a meu amigo H. Hinrichsen que gentilmente me disponibilizou algumas imagens e com quem pude discutir alguns dos tópicos aqui apresentados. Agradeço também ao cartunista francês Laurent Taudin por permitir que eu usasse sua gravura no frontispício destas notas de aula.

O grande orador romano Quintiliano em sua obra *De Institutio Oratoria*, afirmou no livro I, capítulo V: “*Estilo é a personificação de três excelências: correção, lucidez e elegância*”. É obrigação de quem escreve um texto tentar atingí-las. Ao leitor porém cabe a palavra final se o autor foi bem sucedido na empreitada.

silvio.dahmen@ufrgs.br

Porto Alegre, Novembro 2022.

Literatura de Apoio

Indico abaixo alguns livros nas três categorias (i), (ii) e (iii) descritos anteriormente e que foram por mim usados ao preparar estas notas de aula.

- 1 (ii). J. Foster e J. David Nightingale, *A Short Course in General Relativity, 3rd. Edition*, (Springer, 2006).

Excelente texto no que diz respeito ao balanço entre matemática e física. Ele foi escrito especialmente para estudantes do último ano do curso de física e é talvez o melhor caminho de entrada para a Relatividade Geral. Exercícios e problemas ajudam a fixar o conteúdo ao longo dos capítulos. Nível médio a avançado.

- 2 (ii). L. Landau e E. Lifshitz, *Field Theory (Teoria de Campos)*, vol. II (Pergamon Press, 1985).

Obra prima da série do *Minimum Theoricum* dos dois grandes físicos russos. Famoso pela clareza e economia de palavras. Como reza a lenda, se formos sublinhar as partes importantes do livro, é preciso sublinhar o texto todo. A Relatividade Geral é tratada a partir do capítulo 10. Os nove primeiros capítulos tratam da Relatividade Especial e Eletrodinâmica. A profundidade das discussões e dedução curta e elegante de certas identidades matemáticas são imbatíveis. Nível avançado.

- 3 (ii). Ø. Grøn e A. Næss: *Einstein's Theory: A Rigorous Introduction for the Mathematically Untrained* (Springer, New York, 2011).

Um dos livros mais admiráveis pela tentativa (bem sucedida!) de explicar Relatividade Geral para quem ainda não sabe o que são vetores e derivadas. A abordagem se justifica pelo fato que Næss era filósofo e se propôs a aprender a Teoria de Einstein a partir do zero com a ajuda de Grøn. Esta obra é resultado deste esforço. Nível básico a médio, com alguns tópicos em nível mais avançado. Excelente como livro de apoio, pela analogia recorrente com tópicos de física clássica.

- 4 (i). Ø. Grøn e S. Hervik: *Einstein's General Theory of Relativity with Applications in Cosmology* (Springer, New York, 2007).

Um dos melhores textos sobre Relatividade Geral disponível, com uma boa introdução à Teoria Especial. Linguagem matemática moderna, nível avançado, mas que pode ser melhor aproveitado se já se tem um conhecimento prévio da Relatividade Geral.

- 5 (ii). R. D'Inverno: *Introducing Einstein's Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1998).

O livro de D'Inverno é um dos meus favoritos. Ele foi escrito por um especialista da área que lecionou a disciplina durante anos na Universidade de Southampton, no Reino Unido. É o tipo de livro que podemos usar para um estudo auto-didata. Na minha opinião este é talvez o melhor livro texto já escrito para um curso de Relatividade Geral, pelo perfeito equilíbrio entre matemática e física. Comparado com o livro de Foster e Nightingale, a diferença está no tamanho: enquanto o primeiro pode ser coberto em um curso de 1 semestre uma vez feita uma seleção criteriosa de tópicos, o livro de D'Inverno requer no mínimo 1 ano de curso. Nível médio a avançado.

6 (iii). C. Møller: *The Theory of Relativity* (Oxford University Press, 1952)

Este livro é o resultado de mais de 20 anos lecionando Teoria da Relatividade na Københavns Universitet, onde Møller era pesquisador e docente. A introdução sobre experimentos fundamentais da óptica e sua relação com a teoria de Einstein está entre as mais detalhadas que pode ser encontrada em qualquer livro sobre o assunto. Escrito em uma época em que não havia ainda livros apenas voltados para a Relatividade Geral, o pioneirismo se reflete na notação um pouco ultrapassada quando comparada aos livros mais modernos e na falta de ilustrações que facilitam a compreensão. É uma obra que requer um conhecimento sólido de física e matemática de seus leitores, mas o esforço é compensado pela profundidade com que Møller discute os tópicos por ele apresentados. Nível avançado.

7 (ii). S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley & Sons, 1972).

Um clássico. Weinberg tem sua maneira única de abordar o assunto, aliás qualquer assunto. É um dos melhores livros de Relatividade Geral disponíveis e que serviu de inspiração para muitos autores que vieram depois dele. A apresentação de muitos tópicos é primorosa e as contas são apresentadas com detalhes. O único porém é o fato de não haver uma edição mais atualizada, e portanto com resultados mais recentes. Weinberg não é um fervoroso da visão *geometrodinâmica* da Relatividade Geral e adota, como era de se esperar, um viés de teórico de campos. Nível avançado.

8 (i). N. Straumann, *General Relativity, 2nd Edition* (Springer Verlag, Berlin, 2013).

O livro de Straumann é para pessoas de coração forte. Eu particularmente não acho que seja um livro para iniciantes – e o próprio autor diz isso – mas em suas quase 720 páginas ele tem o que havia de mais atual em termos experimentais e teóricos até 2013, coisa que nenhum livro que eu conheça tem. Um excelente livro de consulta caso queiramos entender mais sobre um particular tópico e sua extensa lista de referências é imbatível. Nível avançado.

9 (i). C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, 1973. Edição comemorativa, Princeton University Press, 2017, com prefácio de David. I. Kaiser).

Uma verdadeira enciclopédia de 1300 páginas divididas em 44 capítulos e, segundo muitos autores, com seus quase 3 kg, uma fonte significativa de campo gravitacional! O livro destes três gigantes da Relatividade, conhecido simplesmente pelo acrônimo MTW, deve ser estudado *cum grano salis*. Referência obrigatória para estudantes de pós-graduação e pesquisadores da área, a nova edição traz alguns resultados mais recentes e atualizações feitas por Thorne. O MTW é basicamente dois livros em um, com tópicos especiais formando um *track* separado. Isto pode confundir e dificultar um iniciante mas o livro sempre foi, e ainda permanece, o mais abrangente tratado de Relatividade Geral que existe. É o tipo de livro que pode ser melhor apreciado por quem já tem uma boa base no assunto. Nível avançado.

10 (ii). T. Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie* (Springer Spektrum, Heidelberg, 2016, 7ª edição).

O livro de Fließbach é um excelente livro para iniciantes onde se nota claramente a influência de Weinberg na escolha e apresentação dos temas. A vantagem em relação a este último porém é o fato de ser mais atual. Fließbach é direto, não ‘abre’ as contas como Weinberg mas isto pode ser uma vantagem pois estimula o leitor a tentar completar algumas passagens matemáticas que o autor não mostra. Há uma série de exercícios propostos e resolvidos, algo pouco comum em livros de Relatividade Geral. Para muitos o idioma é uma barreira, obviamente, mas isto se explica pelo fato que o livro é resultado de um curso que o autor lecionou durante anos na Universidade de Siegen, Alemanha. Nível avançado.

11 (ii). E. Rebhan: *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie* (Springer Spektrum, Heidelberg, 2012).

Outro excelente livro de Relatividade, da Especial à Geral, com muitos capítulos dedicados à Cosmologia e resultados mais recentes. É entre todos os livros o que possui a melhor razão conteúdo/(tamanho da obra). O livro traz um número grande de problemas propostos e se destaca pela clareza das discussões. O livro também é resultado de anos ministrando um curso de Relatividade Especial e Geral na Universidade de Düsseldorf, onde Rebhan era professor e pesquisador, o que explica o idioma e a abordagem. Nível avançado.

- 12 (iii). A. Einstein e outros: *The Principle of Relativity* (Dover Publications, New York, 1952). Em português: *O Princípio da Relatividade* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1983).

De interesse histórico, trata-se de uma coletânea dos artigos originais de Einstein, Lorentz, Weyl e Minkowski sobre a Teoria da Relatividade Especial e Geral. A versão em português da Fundação Calouste Gubelkian se destaca pelas excelentes traduções. De interesse para o curso atual é o texto de Einstein *O Fundamento da Teoria da Relatividade Geral*, o importante tratado publicado no *Annalen der Physik* em 1916 e onde Einstein expõe sua teoria completa pela primeira vez. Como todo texto original, aproveita-se melhor o conteúdo depois de já se ter uma base da teoria.

Alguns leitores talvez estranhem a falta de nomes como Carroll, Wald, Schutz e Stephani na lista acima. Os livros destes autores são também clássicos da área e excelentes para um estudo da Relatividade Geral. Porém, procurei me ater a livros que por sua originalidade e qualidade merecem, na minha opinião, especial destaque. Com algumas exceções (como MTW, Weinberg, D'Inverno, Landau e Lifshitz) muitos destes livros nunca receberam o destaque que julgo merecerem e acho fundamental que o leitor ao menos seja informado de sua existência.

Guia dos Capítulos

Aqui você encontra uma explicação sucinta do que cada capítulo destas notas de aula trata. O objetivo dos primeiros 2 capítulos é mostrar como Einstein teve a idéia de criar uma teoria que generalizasse a Relatividade Especial e assim entender a proposta da teoria assim criada.

Capítulo 1. O objetivo deste capítulo é mostrar como, partindo da Relatividade Especial que se aplica a referenciais inerciais, Einstein tentou generalizá-la para referenciais não inerciais. O resultado principal é que é possível tratar um referencial acelerado como se fosse localmente inercial mas sujeito à forças inerciais (fictícias). O resultado principal é que a passagem de um referencial inercial para um não inercial nada mais é, matematicamente falando, que uma mudança de coordenadas. Mostramos também como esta idéia se aplica a um sistema simples (referencial que gira com velocidade angular uniforme) e quais implicações as transformações de coordenadas trazem consigo.

Capítulo 2. Neste capítulo são discutidos 2 princípios nos quais Einstein se baseou para criar uma Teoria da Relatividade Geral: o Princípio da Equivalência e o Princípio da Covariância. O primeiro permite tratar a gravidade como se fosse também uma força inercial e portanto, em princípio, o resultado do capítulo 1 pode ser estendido para a interação gravitacional. O segundo princípio, que diz que as equações da física devem ter a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas, uma vez que qualquer referencial é, ao menos localmente, inercial, permite que escrevamos as equações de forma covariante e que associemos a gravidade à métrica do espaço.

Capítulo 3. Baseados na idéia do Princípio da Equivalência, mostramos neste capítulo como é possível descrever a gravitação de Newton dentro do contexto da Relatividade Geral pela modificação da métrica. Este resultado é obtido sem que ainda tenhamos deduzido as Equações de Campo de Einstein (ECE), que serão apresentadas no capítulo 9.

Capítulo 4. Começamos neste capítulo a introduzir a idéia de curvatura, que será desenvolvida de forma completa no capítulo 6.

Capítulo 5. Discutimos aqui o transporte paralelo, um importante conceito que nos levará, no capítulo 6 à ideia do tensor de curvatura de Riemann.

Capítulo 6. O tensor de curvatura de Riemann é discutido em detalhes e sua relação com a idéia do Rotacional em variedades curvas.

Capítulo 7. Uma vez que as ECE são equações para a métrica, um tensor de ordem 2, introduzimos aqui a ideia do Tensor de Energia-Momento $T_{\mu\nu}$, ele também um tensor de ordem 2 que entra nas ECE e representa a fonte dos campos gravitacionais.

Capítulo 8. Aqui fazemos algumas estimativas numéricas dos elementos de $T_{\mu\nu}$ que usaremos posteriormente nas aplicações. Estas estimativas nos permitem simplificar as ECE significativamente.

Capítulo 9. Neste capítulo as ECE são deduzidas, baseadas numa abordagem mais física, onde argumentos de simetria entre outras coisas são usados.

Capítulo 10. Discutimos aqui as primeiras soluções exatas das ECE, a conhecida métrica isotrópica e estática de Schwarzschild. Aqui veremos o conceito de *raio de Schwarzschild* e a ideia de solução exterior (solução de vácuo) das ECE. Faremos também uma discussão da física destas soluções.

Capítulo 11. A equação da geodésica na métrica de Schwarzschild é deduzida. Ela nos permite calcular a trajetória de qualquer corpo sujeito à métrica, nos leva à precessão do periélio de Mercúrio e nos permite calcular o desvio da luz por um campo gravitacional e lentes gravitacionais.

Capítulo 12. Aqui é discutida a solução interior de Schwarzschild, a ideia de equilíbrio estelar e a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que relaciona a pressão da gravidade à força gravitacional de estrelas. A solução interior à qual o capítulo se refere é a solução estática, ou seja, aquela para a qual as partículas que constituem a estrela não se movem.

Capítulo 13. Discutimos neste capítulo como a métrica discutida no capítulo 12 nos permite discutir alguns importantes modelos estáticos para estrelas, a diferença entre estrelas relativísticas e Newtonianas e a questão da estabilidade estelar. São apresentados os modelos termodinâmicos de gases politrópicos que modelam diferentes tipos de estrelas.

Capítulo 14. Este capítulo trata das Anãs Brancas e Estrelas de Nêutrons dentro do contexto da Relatividade Geral, dois casos particulares mas muito importantes da métrica estudada nos capítulos 12 e 13. A diferença é na equação de estado do gás usada, neste caso um gás de Fermi, ou seja, não mais o gás clássico dos capítulos anteriores.

Capítulo 15. Aqui são apresentados modelos dinâmicos de estrelas e a importante ideia do colapso gravitacional e das supernovas. Em resumo, tomamos uma estrela cujas partículas só podem se mover na direção radial, não exercem pressão de matéria (poeira) e deduzimos daí uma métrica interior *não estacionária*. Poderíamos pensar nesta métrica como sendo a generalização da métrica interior e estacionária de Schwarzschild para o caso não estacionário. Porém, como discutido, para resolver as Equações de Campo de Einstein introduzimos o conceito de coordenadas Gaussianas ou comóveis, mais apropriadas para o estudo do colapso.

Capítulo 16. O capítulo 16 trata dos buracos negros e de sua física. Esta é uma das aplicações mais importantes da métrica deduzida no capítulo 15.

Capítulo 17. Fazemos aqui uma pequena pausa na discussão de métricas que se aplicam a corpos celestes e antes de procedermos para o modelo cosmológico padrão, discutimos neste capítulo a ideia de ondas gravitacionais, obtidas da linearização das ECE.

Capítulo 18. Uma curta introdução à Cosmologia com algumas datas importantes.

Capítulo 19. Aqui é apresentado o Princípio Cosmológico e a forma esperada da métrica do Universo.

Capítulo 20. O modelo cosmológico de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker é apresentado. Este modelo é o chamado modelo-padrão da Cosmologia e descreve nosso Universo.

Capítulo 21. Algumas aplicações e resultados observacionais da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (métrica FLRW) são discutidas.

Capítulo 22. Discutimos aqui a importante ideia da “escada cósmica” ou extragaláctica de distâncias.

Capítulo 23. Este capítulo tem por objetivo discutir o estado atual do universo e a ideia de matéria e energia escuras.

Capítulo 24. Encerramos com uma discussão da radiação cósmica de fundo e a relação entre temperatura e escala de distâncias do Universo de FLRW.

Os apêndices trazem alguns resultados que complementam as discussões dos capítulos, alguns com exemplos práticos das idéias gerais.

Apêndice A. Neste apêndice é retomada a discussão da ideia de geodésicas (curvas de menor distância entre 2 pontos) e alguns exemplos conhecidos são discutidos. A *Equação da Geodésica* é deduzida de 2 maneiras diferentes: primeiro usando a ideia da tangente ao longo de uma trajetória e depois através das equações de Euler-Lagrange de uma partícula livre.

Apêndice B. Aqui é discutido mais detalhadamente um exemplo de um referencial acelerado com velocidade angular constante e como surgem as forças de Coriolis e força centrífuga dentro do contexto da generalização da Relatividade Especial apresentado no capítulo 1. A ideia é ilustrar como a equação da geodésica do capítulo 2, que é uma equação de forma covariante, leva aos resultados esperados.

Apêndice C. Discussão da mecânica clássica para referenciais que giram com velocidade angular constante e como são tratadas as forças centrífuga e de Coriolis classicamente. Este apêndice visa apenas lembrar algumas idéias e sua leitura não é necessária para a compreensão das ideias discutidas nos primeiros dois capítulos.

Apêndice D. Discute-se brevemente como fazer física em espaços curvos.

Apêndice E. Neste apêndice, de interesse histórico, apresento uma tradução de uma palestra que Einstein deu em 1922 na Universidade de Kyoto, no Japão. Nela Einstein descreve brevemente, sem recorrer à matemática, os assuntos tratados nos capítulos 1 e 2 destas notas de aula. A estória por trás desta palestra é curiosa pois ela foi anotada pelo físico Jun Ishiwara em alemão, idioma que ele dominava, e publicada posteriormente em japonês. No entanto o texto que Ishiwara anotou foi perdido e hoje o texto que dispomos (em inglês e alemão) são traduções feitas a partir da versão japonesa de Ishiwara.

Apêndice F. Uma dedução mais rigorosa da precessão do periélio de Mercúrio, que se aplica também à órbitas de maior excentricidade, é aqui discutida. Esta discussão complementa o resultado do periélio de Mercúrio apresentado no capítulo 10 que, embora mais simples, é limitada em sua aplicabilidade.

Apêndice G Uma interpretação geométrica dos símbolos de Christoffel é apresentada, usando-se para tanto as transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas no espaço Euclidiano.

Apêndice H. Neste apêndice é discutida a física de buracos negros de Reissner-Nordstrøm.

Apêndice I. Mostra-se como dentro da RG o paradoxo de Olbers pode ser solucionado.

Apêndice J. É discutido mais detalhadamente a diferença entre distâncias e coordenadas, tomando a métrica de Schwarzschild como exemplo.

Sumário

1	<i>Referenciais e Geometria</i>	25
1.1	<i>O início: o Bericht de Einstein de 1907</i>	25
1.2	<i>Referenciais e Relatividade Especial</i>	28
1.3	<i>O potencial relativístico</i>	31
2	<i>Os Princípios da Equivalência e da Covariância</i>	33
2.1	<i>O Princípio da Equivalência</i>	33
2.2	<i>O elevador de Einstein</i>	35
2.3	<i>O Princípio da Covariância</i>	37
2.4	<i>Geometrodinâmica</i>	39
2.5	<i>Consequências do Princípio da Equivalência: a Prática</i>	40
2.6	<i>A Física</i>	42
2.7	<i>Relação entre $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e $g_{\mu\nu}$</i>	43
3	<i>Movimento em um campo gravitacional</i>	47
3.1	<i>Equações do movimento</i>	47
3.2	<i>O limite Newtoniano</i>	48
3.3	<i>O tempo próprio</i>	50
3.4	<i>O desvio para o vermelho gravitacional</i>	53
4	<i>Aspectos geométricos: a idéia de curvatura</i>	55
4.1	<i>Curvatura do espaço</i>	55

5	<i>O transporte paralelo.</i>	59
5.1	<i>O transporte paralelo</i>	59
5.2	<i>Outra abordagem</i>	61
5.3	<i>Exemplos de transporte paralelo no plano e na esfera.</i>	62
5.4	<i>A geometria</i>	66
6	<i>O tensor de curvatura de Riemann.</i>	69
6.1	<i>O rotacional</i>	69
6.2	<i>Transporte paralelo e rotacional.</i>	71
6.3	<i>Alguns resultados importantes</i>	74
7	<i>O tensor energia-momento e a hidrodinâmica relativística</i>	77
7.1	<i>Poeira cósmica e estrelas: fluidos ideais</i>	77
7.2	<i>Fluido relativístico</i>	80
7.3	<i>O tensor de tensões</i>	82
8	<i>Tensor Energia-Momento</i>	87
8.1	<i>Leis de Conservação</i>	87
8.2	<i>As fontes do campo gravitacional e aplicações</i>	88
9	<i>Equações de Campo de Einstein</i>	93
9.1	<i>A teoria e suas duas faces</i>	93
9.2	<i>A Física</i>	95
9.3	<i>Dedução das Equações de Einstein</i>	97
9.4	<i>O limite Newtoniano e a determinação de a</i>	100
9.5	<i>A constante cosmológica Λ</i>	101
10	<i>Campos gravitacionais estáticos: a métrica de Schwarzschild</i>	103
10.1	<i>A métrica estática e isotrópica</i>	103

10.2	<i>Forma padrão da métrica isotrópica</i>	105
10.3	<i>Métrica, símbolos de Christoffel e tensor de Ricci</i>	106
10.4	<i>Schwarzschild e o sistema solar</i>	108
10.5	<i>A solução exterior de Schwarzschild</i>	108
10.6	<i>A física da solução de Schwarzschild</i>	111
10.7	<i>A interpretação física da métrica</i>	112
11	<i>Movimento num campo central e aplicações</i>	119
11.1	<i>As equações de movimento clássicas</i>	119
11.2	<i>As equações de movimento relativísticas: método 1.</i>	121
11.3	<i>As equações de movimento relativísticas: método 2.</i>	123
11.4	<i>A Equação de Binet na métrica de Schwarzschild</i>	125
11.5	<i>Característica geral das soluções: órbitas</i>	128
11.6	<i>Aplicação 1: a precessão do periélio de Mercúrio</i>	130
11.7	<i>A deflexão da luz pela curvatura do espaço</i>	134
11.8	<i>Lentes Gravitacionais</i>	137
12	<i>Estrelas: equilíbrio, colapso e a métrica interior de Schwarzschild</i>	139
12.1	<i>Equilíbrio estelar</i>	139
12.2	<i>Estimando valores</i>	141
12.3	<i>Métrica interior de Schwarzschild</i>	148
12.4	<i>A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff</i>	151
12.5	<i>Resumo: o equilíbrio estelar</i>	152
13	<i>Estrelas: modelos estáticos</i>	153
13.1	<i>Considerações gerais: como proceder</i>	153
13.2	<i>Estrelas relativísticas</i>	154
13.3	<i>Estrelas newtonianas</i>	157
13.4	<i>Estabilidade</i>	161

14	<i>Anãs Brancas e Estrelas de Nêutrons</i>	163
	14.1 <i>Anãs brancas</i>	163
	14.2 <i>A física</i>	167
	14.3 <i>Estrelas de nêutrons - Pulsares</i>	169
15	<i>Modelos dinâmicos de estrelas e colapso gravitacional</i>	175
	15.1 <i>O teorema de Jebsen-Birkhoff e a métrica isotrópica dependente do tempo</i>	175
	15.2 <i>Métrica isotrópica dependente do tempo</i>	177
	15.3 <i>Símbolos de Christoffel e tensor de Ricci</i>	181
	15.4 <i>Colapso gravitacional e supernovas</i>	181
	15.5 <i>Supernovas</i>	191
16	<i>Buracos negros</i>	195
	16.1 <i>O que são buracos negros</i>	195
	16.2 <i>Michell, Laplace e estrelas escuras</i>	198
	16.3 <i>Como entender buracos negros</i>	200
	16.4 <i>Queda livre de partícula na superfície da estrela vista de um referencial distante</i>	201
	16.5 <i>O que veríamos e o desvio gravitacional para o vermelho*</i>	203
	16.6 <i>A trajetória de partículas e fótons na métrica de Schwarzschild</i>	206
	16.7 <i>As coordenadas de Eddington-Finkelstein</i>	207
	16.8 <i>As coordenadas de Kruskal-Szekeres</i>	210
	16.9 <i>Discussão do resultado de Kruskal-Szekeres</i>	211
17	<i>Ondas Gravitacionais</i>	213
	17.1 <i>Introdução</i>	213
	17.2 <i>Poincaré, Einstein, Eddington e as ondas gravitacionais</i>	214
	17.3 <i>A linearização das Equações de Einstein</i>	216
	17.4 <i>A transformação de calibre</i>	218

17.5	<i>Um detalhe importante da linearização</i>	220
17.6	<i>Um outro detalhe importante da linearização</i>	221
17.7	<i>Ondas planas</i>	223
17.8	<i>Energia e momento das ondas gravitacionais</i>	227
17.9	<i>Quadrupolos gravitacionais</i>	228
17.10	<i>Corpo rígido girante</i>	230
17.11	<i>Detecção de ondas gravitacionais por interferometria</i>	236
18	<i>Cosmologia I: uma introdução</i>	243
18.1	<i>Introdução</i>	243
18.2	<i>Algumas datas importantes</i>	246
19	<i>Cosmologia II: O Princípio Cosmológico</i>	251
19.1	<i>Um pouco de história</i>	251
19.2	<i>Princípio cosmológico</i>	253
19.3	<i>A métrica</i>	254
20	<i>Cosmologia III: a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</i>	257
20.1	<i>A métrica</i>	257
20.2	<i>Interpretação dos resultados</i>	260
21	<i>Cosmografia I: desvio para o vermelho, escala de distâncias cosmológicas</i>	265
21.1	<i>O Princípio Cosmológico e a Métrica de FLRW</i>	265
21.2	<i>Medidas de tempo e de espaço</i>	266
21.3	<i>Velocidades superluminais</i>	268
21.4	<i>Expansão do Universo e desvio para o vermelho</i>	270

22	<i>Cosmografia II: a escada cósmica de distâncias</i>	275
	22.1 <i>A escada cósmica ou extragalática de distâncias</i>	275
	22.2 <i>Distâncias na métrica de FLRW</i>	277
	22.3 <i>Determinação de H_0 e q_0</i>	279
23	<i>O estado do Universo</i>	281
	23.1 <i>As componentes do substrato cósmico</i>	281
	23.2 <i>Evolução temporal do parâmetro de escala $x(\tau)$</i>	284
	23.3 <i>Ω_{mat} e matéria escura</i>	285
	23.4 <i>Ω_Λ: do que é feita a constante cosmológica?</i>	286
24	<i>O Modelo Padrão da Cosmologia</i>	289
	24.1 <i>O cenário da evolução do Universo</i>	289
	24.2 <i>Relação entre temperatura T e $R(t)$</i>	291
	24.3 <i>Radiação Cósmica de Fundo</i>	292
	24.4 <i>Escala temporal</i>	294
A	<i>Tangentes e Geodésicas</i>	297
B	<i>Coriolis na Relatividade Especial</i>	307
	B.1 <i>Propriedades de Transformação dos Símbolos de Christoffel</i>	307
C	<i>Referenciais não inerciais na mecânica clássica e força de Coriolis</i>	311
D	<i>Física em espaços curvos.</i>	317
	D.1 <i>A derivada covariante e a regra de transformação</i>	317
	D.2 <i>Mecânica do ponto</i>	318
	D.3 <i>Eletrodinâmica</i>	319

E	<i>A palestra de Einstein em Kyoto</i>	321
F	<i>A precessão do periélio</i>	329
	F.1 <i>A precessão</i>	329
G	<i>Os símbolos de Christoffel e coordenadas curvilíneas</i>	337
H	<i>Buracos negros de Reissner-Nordstrøm</i>	347
	H.1 <i>Considerações gerais</i>	347
	H.2 <i>A métrica</i>	348
I	<i>O paradoxo de Olbers</i>	353
J	<i>Coordenadas e distâncias</i>	357
	J.1 <i>A métrica de Schwarzschild</i>	357

1

Referenciais e Geometria

As equações fundamentais da Mecânica Clássica se aplicam somente à referenciais inerciais. Na presença de referenciais não inerciais, surgem as chamadas forças inerciais ou fictícias. No contexto da Relatividade Especial é possível eliminar as forças fictícias por meio de uma transformação de coordenadas, obtendo novamente um referencial inercial local. Uma das características destas forças é que corpos e objetos sofrem a mesma aceleração, independente de suas massas, da mesma maneira que a força gravitacional. Deste modo seria possível fazer com que os efeitos gravitacionais também desapareçam, escolhendo para tanto um referencial ligado a um laboratório em queda livre. É sobre este fundamento que Einstein construiu sua Teoria da Relatividade Geral: as forças gravitacionais podem ser eliminadas pela mudança para um referencial inercial local. Nosso objetivo aqui é entender como isto é feito no contexto de referenciais acelerados antes de aplicarmos esta ideia para a gravidade, o que será feito no capítulo 2.

1.1 O início: o Bericht de Einstein de 1907

Para entendermos exatamente o que é a Teoria da Relatividade Geral (TRG), precisamos entender primeiramente qual a pergunta que o colocou no caminho que o levaria, depois de um longo percurso, a esta que é considerada uma das mais belas teorias da Física.

Em 1907 o editor-chefe do conceituado *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Johannes Stark, solicitou a Einstein que ele escrevesse um Bericht sobre a Relatividade Especial ¹. O *Jahrbuch* fora criado em 1899 e, diferentemente do *Annalen der Physik*, tinha por objetivo publicar artigos de revisão ou análises de literatura e do *state-of-the-art* da pesquisa corrente. Entre seus editores se encontravam nomes como o de Marie Curie, Ernst Rutherford, Svante Arrhenius, Wilhelm Wien, Emil Warburg e H. A. Lorentz, entre outros. Em um longo artigo de 52 páginas Einstein discute os fundamentos da Relatividade Especial e suas aplicações em Mecânica, Eletrodinâmica, Ótica e Termodinâmica ². Na última seção do artigo, intitulada *Relativitätsprinzip und Gravitation*,

¹ A tradução literal de *Bericht* é relato, mas o sentido usado era o que chamaríamos hoje de artigo de revisão.

² A. Einstein, *Über da Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, *Jahr. d. Rad. und El.* **4**, (1907), pp. 411 – 462.

Einstein se pergunta se seria possível generalizar Teoria da Relatividade Especial para referenciais acelerados – daí o nome Teoria da Relatividade Geral que sua nova teoria receberia no futuro. No parágrafo 17, intitulado *Referenciais Acelerados e Campo Gravitacional*, Einstein diz:

Até o momento aplicamos o princípio da relatividade, ou seja a premissa que as leis da Natureza independam do movimento do referencial, apenas a referenciais não acelerados. Seria possível aplicar este princípio também àqueles sistemas que se encontram acelerados uns em relação aos outros?

Este não é o local para um tratamento detalhado deste assunto. Porém, todo aquele que até o momento tenha acompanhado as aplicações do princípio da relatividade se vê confrontado com esta pergunta e não quero aqui deixar de expressar minha opinião sobre o assunto.

Imaginemos dois referenciais Σ_1 e Σ_2 onde Σ_1 tenha uma aceleração γ constante na direção de seu eixo x . O referencial Σ_2 está parado mas se encontra num campo gravitacional homogêneo que imprime a todos os objetos uma aceleração $-\gamma$ na direção do eixo x .

Até onde sabemos, as leis da física relativas à Σ_1 não diferem em nada daquelas relativas à Σ_2 . Isto se deve ao fato que todos os corpos em um campo gravitacional têm a mesma aceleração. Desde modo, e considerando nossa experiência até o momento, não há qualquer motivo para assumirmos que os referenciais Σ_1 e Σ_2 difiram de alguma maneira um do outro. Sendo assim, partiremos do pressuposto de agora em diante que campos gravitacionais e referenciais acelerados são fisicamente equivalentes.

Este hipótese generaliza o princípio da relatividade para referenciais uniformemente acelerados. O valor heurístico desta hipótese baseia-se no fato que ela nos permite substituir um campo gravitacional homogêneo por um referencial uniformemente acelerado e este último é, de um certo modo, passível de tratamento teórico³.

³ A. Einstein, ebd. p. 454.

Portanto a Teoria Geral da Relatividade surgiu da tentativa de Einstein em generalizar sua Teoria da Especial para referenciais não inerciais. No artigo acima citado encontramos o cerne de sua teoria (o Princípio da Equivalência) que o levaria, 9 anos mais tarde, a completar sua famosa teoria da gravitação. Nas poucas páginas restantes, baseado naquilo que chamaríamos hoje de aproximação de campo fraco, ele deduz o comportamento de relógios num campo gravitacional bem como o fato que a trajetória de raios de luz são curvadas na presença da gravidade. Foi em referência à equivalência entre campos gravitacionais e referenciais acelerados que ele disse, numa palestra proferida em 1922 na Universidade de Kyoto, no Japão – que esta teria sido *'a ideia mais feliz de minha vida'*⁴:

Estava eu sentado na minha poltrona no Escritório de Patentes de Berna quando, repentinamente, me veio a seguinte ideia: quando uma pessoa está em queda livre, ele não sente o próprio peso. Fiquei pasmo. Esta ideia simples me deixou profundamente impressionado e me colocou na direção de uma teoria da gravitação [...] que todo fenômeno natural, com exceção da Lei da Gravidade, poderia

⁴ A história desta palestra e como ela chegou até nós é discutida no apêndice E.

ser entendido segundo os conceitos da teoria da relatividade especial. Senti um desejo profundo de entender o porquê. Para um observador que cai do telhado de uma casa não existe – ao menos em sua vizinhança imediata – um campo gravitacional. Quando neste caso o observador deixa que outros objetos caiam com ele, então em relação a ele estes objetos se encontram em repouso ou num movimento uniforme. Deste modo, a comprovação experimental da independência da aceleração da gravidade é um forte argumento para o fato que o postulado da Relatividade pode também ser estendido para sistemas de coordenadas que não se movam uniformemente um em relação ao outro.

É difícil imaginarmos que referenciais acelerados sejam equivalentes à referenciais inerciais no que diz respeito à descrição da Natureza: sabemos que nestes primeiros somos forçados a introduzir as conhecidas forças fictícias (ou inerciais), como por exemplo a força centrífuga e de Coriolis, para a correta descrição da dinâmica dos sistemas estudados. Estas forças não tem origem em interações físicas entre corpos, dependendo somente da aceleração dos referenciais nas quais são descritas. Por trás disto está o conceito de espaço absoluto de Newton, *i.e.* aquele em relação ao qual estas forças não existem. Porém, com o abandono da ideia de um espaço absoluto, Einstein se viu forçado a concluir que as forças inerciais deveriam se tratadas como quaisquer outras forças uma vez que, por aquilo que foi exposto, referenciais uniformemente acelerados e aqueles ditos inerciais são equivalentes. As forças fictícias – que dividem com a gravidade a propriedade de imprimir a todos os corpos a mesma aceleração – devem ter portanto uma origem física. Mas qual seria a origem desta espécie de “campo gravitacional”, ou seja da causa destas forças? Para responder a esta pergunta Einstein buscou inspiração em Ernst Mach, para quem as forças inerciais seriam um efeito da atuação da massa de todos os corpos celestes distantes sobre os corpos em referencias acelerados. Em outras palavras, a inércia de um corpo seria um efeito da interação deste com todas as massas do Universo. Esta ideia pode nos parecer absurda pois em um referencial inercial, esta atração “gravitacional” devido às massas distantes do Universo não se fariam sentir. Não há porém nada de absurdo nesta idéia se pensarmos que algo semelhante ocorre na Eletrodinâmica: o surgimento de um campo magnético é devido ao movimento de cargas. Como vimos no curso de Relatividade Especial, ao mudarmos para um referencial onde as cargas se encontram paradas, vemos apenas um campo elétrico. A única diferença entre os dois sistemas é que a causa do campo magnético está no movimento de sistemas de cargas no nosso laboratório, ao passo os campos inerciais em sistemas acelerados têm sua origem no movimento de corpos celestes distantes⁵. Esta idéia, também conhecida como Princípio de Mach, acabou sendo abandonada por Einstein posteriormente. Um dos poucos físicos, até onde eu saiba, que tentou desenvolver um modelo matemático para as forças inerciais baseado no princípio de Mach foi o cosmólogo alemão H.-J. Treder em

⁵ C. Møller, *op. cit.*, p. 219.

sua obra *A Relatividade da Inércia*⁶, como fica claro na introdução de sua obra:

O objetivo do presente tratado é a elaboração de uma teoria matemática exata para o princípio da relatividade da inércia, ou seja do princípio proposto por Einstein e inspirado por Mach, segundo o qual “a inércia tem sua origem em uma espécie de interação entre corpos” (carta de Einstein para Mach em 25.06.1913).

⁶ Hans-Jürgen Treder, *Die Relativität der Trägheit*, Akademie-Verlag, Berlin, 1972.

A dedução rigorosa de um princípio de Mach pode ser feita, como mostra Treder, dentro da chamada mecânica de Riemann. Porém esta mecânica é incompatível com a TRE e portanto não é capaz de abarcar em seu bojo a Eletrodinâmica, e muito menos a TRG.

1.2 Referenciais e Relatividade Especial

As equações do movimento de Newton tem a mesma forma em todos os referenciais inerciais (RI) o que, matematicamente, significa que são **covariantes por transformações de Galileu**. Em referenciais não inerciais (RNI) as equações tem forma diferente: surgem as chamadas **forças inerciais** ou **fictícias**, como por exemplo a força centrífuga e a força de Coriolis em referenciais que giram. Experimentalmente o que diferencia referenciais inerciais de não inerciais é a ausência de tais forças. Com o advento da Relatividade Especial não houve uma mudança no fato que RI's continuam sendo especiais ou, como os chamava Einstein, privilegiados: embora os conceitos de espaço e tempo absoluto tenham sido relativizados, permaneceu a idéia de uma estrutura espaço-temporal absoluta que diferencia RI's de referenciais mais gerais. A Relatividade Geral mudou isto.

Vamos entender quais as mudanças introduzidas por RNI's na Relatividade Especial. A lei da Inércia

$$m \frac{du^\alpha}{ds} = 0 \quad (1.1)$$

só se aplica nesta forma em RI's. Nesta expressão s representa uma variável qualquer que parametriza trajetórias. Normalmente escolhemos o tempo t como parâmetro mas ele pode ser qualquer outra variável que parametrize a curva de forma unívoca. Ao passarmos para um RNI a equação acima deixa de ser válida. Um exemplo típico é a do referencial que gira com velocidade angular ω constante (v. Apêndice C).

Nosso objetivo é tentar entender como poderíamos tratar um referencial não inercial do ponto de vista da Relatividade Especial. Tomemos para isto um sistema de coordenadas x'^ν associado a um RNI que gira uniformemente em relação a um RI, cujas coordenadas denotamos por x^μ . Podemos imaginar este RNI como sendo um grande carrossel sobre

o qual se encontra uma pessoa, ou mesmo um satélite em órbita circular no entorno da Terra. As relações entre as coordenadas são

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\omega t') - y' \sin(\omega t') & z &= z' \\y &= x' \sin(\omega t') + y' \cos(\omega t') & t &= t'\end{aligned} \quad (1.2)$$

O elemento de linha ds^2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned}ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\end{aligned} \quad (1.3)$$

em termos das coordenadas do RI ou na forma

$$\begin{aligned}ds^2 &= [c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' \\ &\quad - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= g_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu\end{aligned} \quad (1.4)$$

em termos das coordenadas do RNI. A conclusão disto é que, diferentemente de sistemas inerciais, onde o elemento de linha tem sempre a forma $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ da TER com

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (1.5)$$

para sistemas não inerciais, considerando-se a transformação entre coordenadas x^μ do RI e x'^ν do RA como sendo

$$x^\mu = x'^\nu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (1.6)$$

temos sempre

$$\begin{aligned}ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} dx'^\mu \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu\end{aligned} \quad (1.7)$$

de onde obtemos o importante resultado

$$g_{\mu\nu}(x') = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (1.8)$$

Isto significa que do ponto de vista da Relatividade Especial a passagem de um RI para um RNI corresponde a uma mudança de coordenadas e a conseqüente mudança de uma métrica plana $\eta_{\alpha\beta}$ para uma métrica não plana $g_{\mu\nu}$. Como entender isto fisicamente? Uma discussão simples

nos permite elucidar este ponto. Para facilitar a discussão, vamos nos restringir ao movimento no plano.

Se nos perguntarmos qual a distância entre dois pontos localizados entre (r, θ) e $(r + dr, \theta)$ obteremos em ambos os referenciais a distância dl e dl' tal que

$$dl = dl' = dr. \quad (1.9)$$

A velocidade do movimento do RNI é perpendicular à direção da régua e portanto não há contração de Lorentz na direção radial. Por outro lado, se considerarmos dois pontos entre (r, θ) e $(r, \theta + d\theta)$, a régua que os conecta terá uma velocidade $r\omega$ relativa à S e portanto será menor que quaisquer régua parada em S . Isto implica que a distância medida entre os pontos por esta régua contraída vale

$$dl' = \frac{rd\theta}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}}. \quad (1.10)$$

Disto concluímos que a distância dl' entre os pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$ é

$$dl'^2 = dr^2 + \frac{rd\theta}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}}. \quad (1.11)$$

Há algo surpreendente nestas expressões. Consideremos, por exemplo, a curva dada por $r = \text{const}$. Segundo a equação (1.9), esta curva é obviamente um círculo. O perímetro deste círculo, segundo (1.10), mede

$$\int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} \quad (1.12)$$

e portanto a razão entre o perímetro e o raio do círculo vale

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} > 2\pi. \quad (1.13)$$

Portanto, ao assumirmos como válido o princípio da relatividade generalizado, segundo o qual sistemas de coordenadas acelerados são equivalentes a sistemas inerciais, devemos abrir mão da geometria Euclideana como princípio basilar da descrição do espaço, princípio este que havia sido estabelecido em bases sólidas por I. Kant e que continua válido na Relatividade Especial.

Este resultado nos mostra que nos é permitido incluir dentro do escopo da Relatividade Especial os referenciais não inerciais desde que achemos a métrica apropriada e deixemos de lado a geometria Euclideana como descrição do espaço. Não obstante esta constatação, muitas das leis por nós conhecidas só se aplicam em referenciais inerciais. Para que possamos descrever toda a Física em referenciais arbitrários, é necessário descobrirmos uma versão das leis que seja a mesma para quaisquer referenciais. Em outras palavras, é necessário construir a Física em uma linguagem *covariante*. No caso mecânico aqui discutido,

precisamos de uma equação de movimento correta pois a equação (1.1) só é válida em referenciais inerciais. A equação correta (covariante) neste caso é a chamada [equação da geodésica](#), que será discutida no capítulo 2. Isto não impede porém que tiremos algumas conclusões interessantes da física em referenciais acelerados antes de termos uma Física plena em métricas mais gerais.

1.3 O potencial relativístico

Podemos descrever a força centrífuga (apêndice C) como sendo originada a partir de um 'potencial centrífugo' Φ :

$$\Phi = -\frac{\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) \quad \text{com} \quad \mathbf{F}_c = -m\nabla' \Phi. \quad (1.14)$$

Da expressão para a métrica do RNI por nós obtida na seção anterior, podemos ver que o potencial Φ está relacionado à g^{00} segundo

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (1.15)$$

Em outras palavras, o potencial centrífugo aparece diretamente na componente temporal da métrica. Adiantando-nos um pouco, se a ideia de Einstein segundo a qual podemos tratar a gravidade da mesma maneira que podemos tratar forças fictícias, então o potencial gravitacional clássico de Newton também implicaria numa métrica do tipo

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi_G}{c^2}. \quad (1.16)$$

onde Φ_G é o potencial gravitacional Newtoniano

$$\Phi_G = -\frac{GM}{r} \quad (1.17)$$

gerado por um corpo de massa M . Portanto a métrica na presença de gravidade vale

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.18)$$

Na verdade, como teremos oportunidade de ver neste curso, esta é a famosa aproximação Newtoniana da Relatividade Geral e se aplica sempre que os campos gravitacionais são fracos. A métrica acima é portanto correta dentro de seu limite de aplicabilidade (existe outros termos da expansão, comumente conhecidos pelo nome de expansão pós-Newtoniana (*post-newtonian expansion*)).

Voltando à questão da força centrífuga, um resultado interessante desta análise é a questão do tempo-próprio medido por um observador

parado no RNI. O tempo próprio, como sabemos, é definido para o relógio estacionário ($dx' = dy' = dz' = 0$) segundo a equação

$$ds_{\text{relógio}} = cd\tau \quad (1.19)$$

e portanto

$$d\tau = \frac{ds_{\text{relógio}}}{c} = \sqrt{g^{00}} dt = \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} dt. \quad (1.20)$$

Segundo esta expressão o tempo-próprio de um relógio no RNI pode ser determinado a partir de medidas feitas no RI. Neste exemplo encontramos um conceito interessante, aquele do **tempo-coordenada** t (*coordinate time*). Na Relatividade Especial o tempo-coordenada pode ser o tempo medido por relógios associados a quaisquer referenciais inerciais. Na Relatividade Geral, o tempo-coordenada é normalmente pensado como sendo o de um observador infinitamente distante dos objetos em estudo e portanto não sujeito à campos gravitacionais. Consequentemente ele não sofre efeitos relativísticos. Teoricamente tempos-coordenadas não podem ser medidos, mas apenas calculados a partir de relógios reais cujas leituras definem intervalos entre evento. Na prática, a baixas velocidades e campos gravitacionais fracos, podemos desprezar a diferença entre eles. Isto nos leva a outra conclusão importante sobre a diferença da Relatividade Restrita e a Geral: na primeira, o v do fator de Lorentz representa a velocidade relativa entre dois RI's e portanto cada RI tem seu tempo global, ou seja, um conjunto infinito de relógios sincronizados que marcam o mesmo tempo. As relações entre Δt de um referencial e $\Delta t'$ de outro é sempre a mesma, independente da posição dos relógios nos respectivos RI's. Na Relatividade Geral o tempo global perde sentido pois ele só pode ser definido localmente, uma vez que relógios em diferentes pontos do espaço se movem em ritmos diferentes. Podemos pensar no tempo de coordenada como sendo um parâmetro apenas.

Resumindo: Einstein conseguiu ver que era possível descrever RNI's usando a Relatividade Especial pois a passagem de um RI para um RNI é, matematicamente falando, apenas uma questão de transformação de coordenadas. O preço a pagar por isto é que réguas e relógios se comportam de maneira diferente dependendo do local do espaço onde se encontram e a geometria Euclideana deixa de ser válida. Esta foi a chave que permitiu a ele abrir a porta que o conduziu à Relatividade Geral. Discutiremos isto nos próximos capítulos.

Os Princípios da Equivalência e da Covariância

*As idéias discutidas no capítulo 1 colocaram Einstein no caminho de um princípio geral da relatividade, que se aplicasse a todos os referenciais, inerciais e não inerciais. No entanto, para poder aplicar suas idéias, foi preciso achar um procedimento matemático que permitisse escrever as equações em qualquer sistema de coordenadas. Os fundamentos sobre o qual Einstein construiu a Teoria da Relatividade Geral foram assim o Princípio da Equivalência e o da Covariância. O primeiro, em sua versão mais simples, diz que **localmente** corpos sob ação de forças, em particular gravíticas, se comportam como se fossem corpos livres e portanto podem ser descritos pela Teoria da Relatividade Especial. Em outras palavras, a métrica nas vizinhanças do corpo é Minkowskiana. O segundo diz que todas as leis da Física devem ter a mesma forma, independente do sistema de coordenadas escolhido. Com isto é possível colocar o primeiro princípio em forma matemática. Discutiremos estes dois princípios detalhadamente e mostraremos como chegar à idéia da gravidade enquanto curvatura do espaço-tempo.*

2.1 O Princípio da Equivalência

O processo histórico do desenvolvimento da TRG é longo mas se conseguirmos entendê-lo na sua essência, precisamos achar um meio de colocar tudo isto no papel em forma de equações. É isto que tentaremos fazer agora. Na fala de Einstein transcrita no capítulo anterior encontramos, de forma indireta, uma menção ao tão propalado **Princípio da Equivalência**. Ele pode ser resumido em três pontos:

O Princípio da Equivalência pode ser resumido em três pontos:

- i. massa inercial e massa gravitacional são iguais a menos de um fator de escala;
- ii. forças gravitacionais e forças inerciais são localmente equivalentes;
- iii. um referencial sob ação da gravidade é localmente inercial e nele valem as conhecidas leis da Teoria da Relatividade Especial *sem* gravidade.

O ítem (i) é a premissa experimental que fundamenta o Princípio da Equivalência. O ítem (ii) é o principal enunciado do conteúdo físico deste princípio. O ítem (iii) é a formulação do princípio, ou seja sua execução. Para entender o ítem (i) imaginemos um simples problema unidimensional de queda livre, num campo homogêneo e com um corpo que cai a partir do repouso, descrito pela equação

$$m_I \ddot{z}(t) = -m_G g \quad (2.1)$$

onde z é o eixo vertical cuja origem é a superfície da Terra. As duas massas que aparecem na equação são, a princípio, diferentes: a massa gravitacional, que vêm da lei de atração universal de Newton

$$m_I a \sim -\frac{m_G M_G}{r^2} = -m_G \frac{M_G}{r^2} = -m_G g(r). \quad (2.2)$$

A massa m_I que representa, segundo Newton, a resistência do corpo à mudança de seu estado de movimento, isto é, sua inércia. Não existe nenhum princípio fundamental na Física que diga que m_I e m_G devam ser iguais. No entanto verifica-se experimentalmente que a razão m_G/m_I é igual a uma mesma constante k para todas os corpos conhecidos, i.e $m_G = k m_I$. Através de uma escolha apropriada de unidades (as chamadas unidades astronômicas) podemos tomar $k = 1$ e portanto $m_G = m_I$. Neste caso a lei de atração universal de Newton se torna

$$m a = -\frac{m M}{r^2} \quad (2.3)$$

Uma outra opção é usarmos unidades do SI em cujo caso $m_G = \sqrt{G} m_I$ onde

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \quad (2.4)$$

é a constante de gravitação universal. Neste caso escrevemos a lei da gravitação universal como

$$m a = -G \frac{m M}{r^2}. \quad (2.5)$$

A identidade entre as duas massas já era conhecido por Galileu mas foi coube a Newton mostrar pela primeira vez, através de experimentos com pêndulos de diferentes comprimentos, que a massa inercial a gravitacional coincidem com uma precisão da ordem de 10^{-3} . Eötvös conseguiu, com uma balança de torção, chegar a uma precisão de $5 \cdot 10^{-9}$ ao passo que experimentos mais recentes levam esta precisão à $4 \cdot 10^{-13}$. Um estudo muito recente feito no CERN carga-massa entre prótons e antiprótons mostrou que $\frac{(q/m)_p}{(q/m)_\bar{p}} = 1.000000000003(16)$, ou seja, 16 partes em um trilhão. Este resultado demonstra não apenas o sucesso do modelo padrão de partículas elementares como também a igualdade em nível subatômico das massas inercial e gravitacional pois os autores consideram a presença de gravidade no experimento ¹

¹ M. J. Borchert, J. A. Devlin, S. R. Erlewein et al, *A 16-parts-per-trillion measurement of the antiproton-to-proton charge-mass ratio*, Nature 601, 53–57 (2022).

O Princípio da Equivalência expresso na forma *massa inercial = massa gravitacional* é chamado de *Princípio da Equivalência Fraco*. O *Princípio da Equivalência Forte*, também conhecido como *Princípio da Equivalência de Einstein*, diz: **em um laboratório em queda livre todas as leis da física são obedecidas como se não houvesse campo gravitacional**. O princípio é chamado justamente de **forte** pois ele estende a idéia da equivalência entre massas para a equivalência entre as leis da física, dependam elas de massa ou não. Em outras palavras, Einstein generaliza para todos os processos físicos um princípio que, em sua forma original, se aplicava apenas à Mecânica. Einstein discutiu este ponto em um de seus famosos *Gedankenexperimente*, neste caso o conhecido *elevador de Einstein*. Eu o discuto brevemente na próxima seção pois a idéia, embora simples, nos ajuda a entender um detalhe importante do Princípio da Equivalência: seu caráter local.

2.2 O elevador de Einstein

A idéia do elevador é simples. Imaginamos dois amigos, Alice e Bernardo. Alice encontra-se em uma nave espacial e Bernardo dentro de elevador na Terra. Ambos possuem um equipamentos com os quais podem fazer vários tipos de medidas. Tanto Alice quanto Bernardo não tem como olhar para fora da nave ou do elevador e portanto só podem depender de medidas para saber se estão se movimentando ou não. Pensemos em duas situações, ilustradas ao lado:

1. **Situação 1.** Na primeira situação Bernardo se encontra parado no elevador e Alice, numa região do espaço livre da influência de campos gravitacionais de outros astros, está na nave espacial cuja aceleração é $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Quaisquer experimentos que Alice faça na nave darão os mesmos resultados que os experimentos que Bernardo fizer no elevador: se ela soltar uma maçã, esta cairá em direção ao chão; um fóton emitido em A descreverá uma trajetória curvilínea até atingir o detector A'. um fóton que se move na direção do movimento da espaçonave sofrerá um desvio para o vermelho. Isto significa que Alice não tem como saber se ela está se movendo com uma aceleração g ou se a espaçonave se encontra numa região onde atua um campo gravitacional igual ao da Terra.

2. **Situação 2.** Neste caso a nave espacial de Alice não está acelerada e o elevador de Bernardo está em queda livre. Se Alice soltar a maçã, esta ficará parada e não cairá em direção ao piso da espaçonave. Um fóton descreverá uma trajetória reta entre A e A'. O efeito Doppler no fóton se propagando verticalmente não existe. O mesmo ocorrerá com Bernardo – do mesmo modo que a pessoa que cai de um telhado

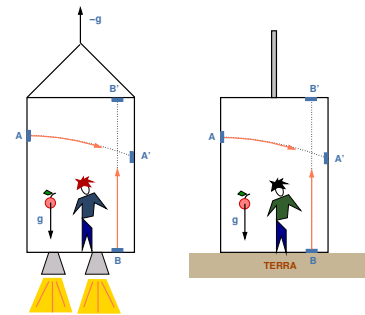


Figura 2.1: Situação 1 – Alice se encontra em uma espaçonave que se move com aceleração g ; Bernardo se encontra na Terra, em um elevador parado, sujeito à aceleração g da gravidade. Não existe qualquer experimento feito localmente que possa distinguir um campo gravitacional homogêneo de um referencial acelerado.

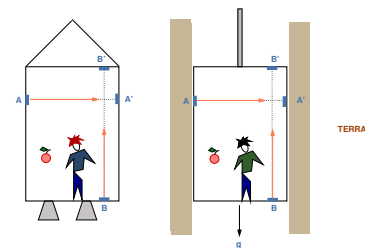


Figura 2.2: Situação 2 – Alice se encontra em uma espaçonave que se move a velocidade constante; Bernardo se encontra na Terra, em um elevador que cai com aceleração g , suposta constante. É impossível para os dois, fazendo experimentos, determinar se existe ou não campo gravitacional em seu laboratório.

segundo Einstein – e portanto para Bernardo não há quaisquer campos gravitacionais.

A conclusão destes experimentos mentais de Einstein é a seguinte: na situação 1, apenas realizando experimentos localmente, tanto Alice quanto Bernardo não tem como dizer quem está acelerado ou quem está na presença de um campo gravitacional de valor g . Na situação 2, realizando experimentos localmente, ambos não tem como saber se estão em queda livre ou numa região do espaço sem campos gravitacionais e portanto seus referenciais também são localmente inerciais.

Há um detalhe muito importante nestas considerações a respeito da equivalência entre um campo gravitacional g e um referencial acelerado ou da inexistência de g e um laboratório em queda livre: assume-se nesta discussão que os campos gravitacionais sejam uniformes. Para campos gravitacionais reais isto não é verdadeiro pois eles são gerados por massas (e energia) e são portanto campos radiais. Por isso é sempre possível – ao menos teoricamente – distinguir campos gravitacionais verdadeiros de referenciais uniformemente acelerados. Além do mais, campos gravitacionais verdadeiros, diferentemente da espaçonave de Alice, podem ser detectados observando-se o chamado *desvio geodésico*, que mede a aproximação de dois corpos em queda livre. Isto ocorre pois as linhas de campo ao longo do qual se movem não são exatamente paralelas e se aproximam à medida que elas caem em direção ao centro atrator. Este é um resultado das chamadas *forças de maré* (*tidal forces*) pois campos gravitacionais exercem forças diferentes em diferentes pontos de um corpo extenso. Isto no entanto não invalida as premissas básicas da Relatividade Geral pois sempre se enfatiza o caráter local da inercialidade dos referenciais e portanto o problema se resume à precisão das medidas e a definição de uma escala para ‘local’, ou seja para uma região suficientemente pequena onde o princípio possa ser aplicado. No caso da Estação Espacial Orbital ISS, considerando suas dimensões, podemos tomar toda ela como sendo um RI. Se pensarmos no campo gravitacional médio do Universo (média esta feita sobre grande número de galáxias), pode-se definir um RI *local* cuja dimensão atinge aproximadamente 10^5 anos-luz, que é a dimensão da Via Láctea. A Relatividade Geral não elimina campos, ela apenas nos dá o caminho para descrever partículas em campos gravitacionais usando referenciais inerciais. Com estas considerações Einstein logrou chegar a um princípio da relatividade geral, ao eliminar, da sua Teoria Especial, a restrição à referenciais ‘privilegiados’ (inerciais). Por isto podemos reformular o Princípio da Equivalência da seguinte forma:

PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN:

Em sistemas inerciais locais se aplicam as leis
da Teoria Especial da Relatividade

Este *Gedankenexperiment* foi a chave que Einstein precisava para desenvolver uma teoria relativística da gravitação, embora seu propósito original não fosse esse: no caso da interação gravitacional, corpos sofrem a mesma aceleração independente de suas massas, em completa analogia com forças inerciais. Portanto, se é possível eliminar forças inerciais por transformação de coordenadas e usar a Relatividade Especial, então podemos fazer o mesmo com a gravidade, eliminando-a por uma transformação de coordenadas. Mas o ponto é: como implementar esta idéia matematicamente para uma interação que é universal, no sentido que atua sobre todas os corpos indistintamente? Afinal, uma coisa é tratar este ou aquele referencial não inercial e lidar com forças fictícias. Outra, bem diferente, é a gravitação. Aqui entra um ponto já discutido nas notas de cálculo tensorial mas que não foi explorado: a *covariância das equações da física*. Este é o segundo pilar da TRG que Einstein usou para desenvolver sua teoria e que nos permite dar forma ao ítem (iii) descrito acima, ou seja, formular o princípio de modo que possamos fazer contas com ele.

Foi isto que Einstein fez, mas as consequências foram surpreendentes.

2.3 O Princípio da Covariância

Este princípio diz basicamente o seguinte: as leis da física devem ser covariantes (ter a mesma forma) por transformações de coordenadas que sejam suaves (diferenciáveis) e admitam inversa. Isto basicamente reflete o fato que a física não deve depender da maneira como escolhemos as coordenadas para descrever os fenômenos. Olhemos primeiro para a lei da inércia na Relatividade Especial:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (2.6)$$

onde τ é o tempo próprio e m sua massa de repouso. Nesta forma a equação só é válida em sistemas de coordenadas cartesianas. Ela também só é invariante por transformações de Lorentz que, como sabemos, descrevem a passagem de um referencial inercial S para outro referencial inercial S' que se move com velocidade v constante. O que mudou com a Relatividade Especial no que diz respeito à equação (2.6) é que ela é invariante por um grupo de transformações que tem as transformações de Galileu como um caso especial.

A passagem de um RI para um RNI é, matematicamente falando, nada mais que uma questão de transformação de coordenadas x^μ do primeiro para as coordenadas x'^μ do segundo. Porém, se as equações da Física devem ter a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas ligados entre si por transformações diferenciáveis que admitam

inversa, a equação (2.6) não é a forma correta da lei de inércia, uma vez que está restrita a uma classe particular de referenciais (inerciais) e transformações (Lorentz). A forma correta é a *equação covariante do movimento de uma partícula livre*:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + m \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (2.7)$$

Esta equação foi por nós deduzidas nas notas de aula de cálculo tensorial a partir das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^v} - \frac{\partial L}{\partial x^v} = 0, \quad (2.8)$$

quando usamos a Lagrangeana de uma partícula livre em coordenadas arbitrárias num espaço de métrica $g_{\mu\nu}$ (v. Apêndice A)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (2.9)$$

Na equação (2.7), o termo

$$m \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad (2.10)$$

corresponde portanto às forças fictícias que caracterizam o referencial não inercial. Num referencial inercial esse termo não existe pois as transformações entre referenciais inerciais – as transformações de Lorentz – são lineares e os símbolos de Christoffel são iguais a zero. Quando isto acontece, (2.7) se reduz à (2.6). Isto ocorre pois sabemos que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.11)$$

e uma vez que no espaço de Minkowski $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, todas as derivadas são iguais a zero. Na equação (2.7) fica bastante claro que o termo (2.10) pode ser interpretado como uma força inercial pois o m que multiplica os dois termos da equação pode ser eliminado, o que experimentalmente significa que forças inerciais causam a mesma aceleração independentemente da massa do corpo em questão. É a isto que Einstein se refere no final do texto reproduzido no capítulo anterior e é a isto que se refere o ítem (ii) da discussão sobre o Princípio da Equivalência.

A implicação do que acabou de ser discutido é profunda: se as massas inercial e gravitacional são iguais, o segundo termo da equação (2.7) pode ser interpretado de tal modo que o termo (2.10) corresponde a uma força gravitacional! Em outras palavras, segundo a teoria da Einstein, a gravidade não é uma força mas um efeito da mudança de uma métrica plana para uma não plana, pois o termo gravítico é função dos símbolos de Christoffel. Porém, sendo os símbolos de Christoffel funções de $g^{\mu\nu}$ de acordo com (2.11), os campos gravitacionais nada mais são que a métrica do espaço!

2.4 Geometrodinâmica

A idéia da Geometrodinâmica de Einstein pode ser resumida na seguinte expressão:

$$\text{TRE sem gravitação} \xrightarrow[\text{de coordenadas}]{\text{transformação}} \text{Leis relativísticas com gravitação} \quad (2.12)$$

A aceleração relativa entre o RT e o RS estão contidas nas leis de transformação das coordenadas, aceleração esta que corresponde a um campo gravitacional. Estas transformações deixam “rastros” nas leis em estudo. Estes rastros indicam a forma pela qual o campo gravitacional pode ser descrito.

Denotemos por ζ^α as coordenadas Minkowskianas de um referencial inercial local. Segundo o Princípio da Equivalência as leis da TRE se aplicam e, em particular, podemos escrever o elemento de linha como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta \quad (\text{RI local, espaço de Minkowski}) \quad (2.13)$$

onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski. A passagem do RI local para um referencial no laboratório RL da Terra é feito segundo as transformações

$$\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.14)$$

Substituindo as transformações em ds^2 obtemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (\text{RL na Terra, espaço de Riemann}) \quad (2.15)$$

com o tensor métrico

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.16)$$

Todo espaço cujo elemento de linha ds^2 tem a forma da Eq. (2.15) é chamado de **espaço de Riemann** ou **variedade de Riemann**.

Os $g_{\mu\nu}$ são definidos por (2.16) segundo as transformações (2.14) entre o conjunto de variáveis $\{\zeta^\alpha\}$ e $\{x^i\}$. Estas transformações dependem da aceleração relativa entre referenciais e do RI local. Diferentes RI's locais em diferentes pontos do espaço tem acelerações diferentes e portanto **para campos gravitacionais reais não existe uma transformação global de coordenadas que seja capaz de transformar uma métrica Riemanniana numa métrica Minkowskiana.**

Como mostramos para o caso do referencial que gira, desde que $\Phi \ll c^2$ podemos escrever

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2} \quad (|\Phi| \ll c^2) \quad (2.17)$$

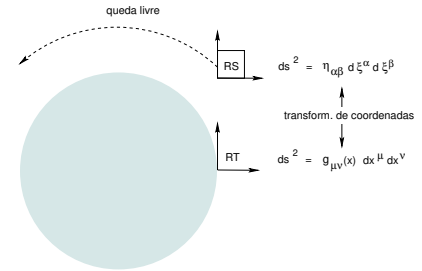


Figura 2.3: O Princípio da Equivalência diz que num referencial a bordo da ISS, em queda livre, tem uma métrica da TER dada por $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta$ onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, ou seja, uma física sem gravitação. Através de uma transformação de coordenadas para o referencial do laboratório na Terra obtém-se as leis da Física com gravitação representada pela métrica $g_{\mu\nu}(x)$.

Este termo da métrica também descreve o potencial gravitacional Newtoniano Φ . Usaremos este resultado para entender o movimento num campo gravitacional usando o formalismo discutido. Por isto, em termos práticos, sempre comparamos o relógio na Terra, por exemplo, com o relógio que se move com um satélite.

2.5 Consequências do Princípio da Equivalência: a Prática

O Princípio da Equivalência diz que em cada ponto de um espaço-tempo existe um **sistemas de coordenadas local** onde as leis da Relatividade Especial se aplicam. Em resumo, existe um sistema \bar{S} de coordenadas $\bar{\zeta}^\alpha$ com uma métrica $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\zeta})$ onde, ao menos para um ponto que podemos chamar de $\bar{\zeta} = 0$ a métrica é pseudo-euclideana (minkowskiana)

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}^\mu d\bar{\zeta}^\nu \quad \text{onde} \quad \bar{g}_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.18)$$

Agora, toda variedade cuja métrica pode ser localmente aproximada por uma métrica pseudo-euclideana é chamada de métrica pseudo-riemanniana. Apenas para lembrar, uma variedade riemanniana tem métrica positiva-definida pois o que define uma variedade riemanniana de n dimensões é o fato dela ser homomórfica ao espaço \mathbf{R}^n que obviamente tem métrica de assinatura $(\underbrace{1, 1, 1, 1, \dots, 1}_{n \text{ vezes}})$.

A métrica de uma variedade riemanniana é, por definição

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.19)$$

e, de modo geral, a transformação de coordenadas de x^μ para x'^μ se dá via

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}}_{=g'_{\alpha\beta}} dx'^\alpha dx'^\beta \quad (2.20)$$

de onde concluímos que

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

É muito importante notar que a forma de ds^2 num espaço métrico sujeito a transformações arbitrárias de coordenadas é uma propriedade da transformação em si e não resultado da constância da velocidade da luz ou da homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, dois princípios básicos da Relatividade Especial. A equação acima que relaciona $g_{\mu\nu}$ e $g'_{\alpha\beta}$ não tem nada a ver com Física! O que a Física nos diz é que no caso particular do Princípio da Equivalência, a expressão matemática acima vale

$$g_{\mu\nu} = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}}_{\text{Minkowski}} \frac{\partial \bar{\zeta}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{\zeta}^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.22)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica da Relatividade Especial e portanto ζ pode ser (caso assim optemos) coordenadas cartesianas (mas não necessariamente).

2.5.1 Sistema de coordenadas local

As idéias acima – vistas do ponto de vista puramente matemático – servem, e enfatizamos aqui, para qualquer transformação arbitrária de coordenadas. Por exemplo, vamos, vamos imaginar que estamos num espaço pseudo-euclidiano (um referencial inercial) descrito por coordenadas cartesianas e queremos descrever este mesmo espaço por coordenadas esféricas (obviamente apenas a parte espacial da métrica). Nesta transformação é importante que as coordenadas não estejam aceleradas, isto é, não dependam do tempo e também que as origens dos sistema de coordenadas cartesiano e esférico coincidam. Em outras palavras, deve haver repouso entre o conjunto de diferentes coordenadas. Obviamente o tempo é o mesmo, independente de como descrevamos a parte espacial da métrica. A transformação de um sistema cartesiano ζ para um sistema de coordenadas qualquer (x^1, x^2, x^3) nos dá

$$ds^2 = \eta_{00}(d\zeta^0)^2 + \eta_{ik} d\zeta^i d\zeta^k = (d\zeta^0)^2 + \eta_{ik} \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^l} \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^m} dx^l dx^m. \quad (2.23)$$

Em outras palavras, como $x^0 = \zeta^0$ podemos escrever o intervalo acima como

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{lm} dx^l dx^m \quad \text{com} \quad g_{lm} = \eta_{ik} \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^l} \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^m}. \quad (2.24)$$

No caso particular de coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= x, & \zeta^2 &= y, & \zeta^3 &= z; \\ x^1 &= r, & x^2 &= \theta, & x^3 &= \varphi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A relação entre as variáveis, como sabemos, é

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como $\eta_{ik} = -\delta_k^i$, segue que $g_{lm} = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}$. Os únicos termos diferentes de zero em g_{lm} são

$$\begin{aligned} -g_{rr} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \\ &= \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} -g_{\theta\theta} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} -g_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

Disto concluímos que, em coordenadas esféricas, o intervalo ds^2 do espaço-tempo vale

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.30)$$

Obviamente que este resultado era por nós conhecido.

2.6 A Física

Vamos agora ver onde entra a idéia de Einstein acerca do Princípio da Equivalência. Em um sistema S localmente inercial de coordenadas ξ , o movimento de uma partícula livre é dado portanto

$$m_0 \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (2.31)$$

Nesta expressão, m_0 é a massa de repouso da partícula, e τ seu tempo-próprio. Esta equação não é válida para sistemas de coordenadas arbitrárias, mas apenas para referenciais inerciais. No entanto, segundo Einstein, a transformação entre referenciais é uma simples transformação de coordenadas. Podemos então passar das coordenadas ξ para as coordenadas x usando

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.32)$$

Tomando a derivada em τ da expressão acima ficamos com

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\zeta^\alpha}{d\tau} \right) = 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \\
 &= \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)}_{= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\
 &= \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Podemos agora multiplicar o lado direito da expressão acima por $\frac{dx^\lambda}{\partial \zeta^\alpha}$ e usar o fato que

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda \tag{2.34}$$

e escrever

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{dx^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu}}_{= \delta_\mu^\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\
 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{dx^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\
 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ definidos via

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{2.36}$$

são os conhecidos **coeficientes de conexão** ou **coeficientes de conexão afim**.

Uma vez que para o sistema de coordenadas x o corpo cai, a equação (2.35) de movimento deve conter o campo gravitacional. Disto vemos que os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ devem estar relacionados à aceleração gravitacional, pelo menos em primeira aproximação. Mostraremos agora que os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $g_{\mu\nu}$ estão relacionados: os coeficientes de conexão são expressos como derivadas da métrica. A consequência disto é grande, pois se os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são dados por derivadas de $g_{\mu\nu}$ e o campo gravitacional é o gradiente de um potencial, então os $g_{\mu\nu}$ são potenciais gravitacionais. Em outras palavras, o que interpretamos como potencial gravitacional nada mais é que a curvatura do espaço.

2.7 Relação entre $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $g_{\mu\nu}$

Nossa discussão anterior mostrou que os campos que determinam a força gravitacional são os coeficientes de conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. O que

pretendemos mostrar aqui é que pela relação entre os coeficientes e $g_{\mu\nu}$, esta última grandeza pode ser interpretada como um potencial gravitacional (isto explica o porque da famosa Equação de Campo de Einstein ser uma equação para $g_{\mu\nu}$).

Lembremos a relação entre os tensores métricos

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.37)$$

Vamos derivar esta equação em relação à variável x^λ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \zeta^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.38)$$

Sabemos porém que

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.39)$$

e se multiplicarmos ambos os lados da expressão acima por $\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Isto implica que podemos escrever a expressão para $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ como

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.41)$$

Como

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} = g_{\rho\nu} \quad \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = g_{\rho\mu} \quad (2.42)$$

podemos escrever

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (2.43)$$

Podemos agora obter equações semelhantes trocando, na expressão acima, primeiro μ por λ e depois ν por λ . Isto nos leva às equações

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\rho\mu} \quad (2.45)$$

Somando agora as duas primeiras expressões e subtraindo a terceira temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} \\ &+ \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \\ &- \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lembremos porém que $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ bem como $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Levando em conta estas simetrias é fácil mostrar que a equação acima se resume à

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu}. \quad (2.47)$$

Multiplicando ambos os lados por $g^{\kappa\nu}$ e considerando que $g^{\kappa\nu} g_{\rho\nu} = \delta^{\kappa}_{\rho}$ obtemos finalmente

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.48)$$

Esta é a expressão que procurávamos. Vamos agora ver no próximo capítulo como a equação de movimento por nós encontrada reproduz o campo gravitacional Newtoniano na aproximação de campos fracos e velocidades baixas.

3

Movimento em um campo gravitacional

As equações por nós obtidas no capítulo anterior em linguagem covariante devem reproduzir os conhecidos resultados da gravitação de Newton, que representam o limite clássico não relativístico $v \ll c$ do movimento presença de campos fracos. As forças gravitacionais são descritas pelos coeficientes de conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, que são funções das primeiras derivadas do tensor métrico.

3.1 Equações do movimento

O movimento de uma partícula livre no referencial inercial local é descrita via

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (3.1)$$

e neste referencial valem as leis da Relatividade Especial. O intervalo ds^2 é dado por

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta \quad (3.2)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço de Minkowski. A integração da equação do movimento reproduz uma trajetória reta

$$\zeta^\alpha = a^\alpha \tau + b^\alpha \quad (3.3)$$

onde τ é o tempo próprio medido no referencial da partícula que cai. Um fóton, segundo princípio forte da equivalência, move-se em linha reta neste referencial. No caso do fóton porém não podemos identificar τ como o tempo próprio pois para este vale

$$ds = cd\tau = 0. \quad (3.4)$$

Descrevemos porém sua equação do movimento da mesma forma, mas em termos de um parâmetro λ

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \quad (3.5)$$

A curva $\zeta^i(\lambda)$ representa o feixe de luz. Indo agora para o laboratório da Terra, temos, pelo que foi discutido anteriormente, que em termos das coordenadas x^μ deste referencial podemos reescrever (11.18) segundo

$$0 = \frac{d}{d\tau} \underbrace{\left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)}_{\frac{d\zeta^\alpha}{d\tau}} = \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (3.6)$$

Multipliquemos agora esta equação por $\partial x^\kappa / \partial \zeta^\alpha$. Uma vez que

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \zeta^\alpha} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\kappa \quad (3.7)$$

ficamos finalmente com as equações do movimento num campo gravitacional:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (3.8)$$

onde, como vimos no capítulo anterior,

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3.9)$$

As equações acima são equações diferenciais de 2ª ordem para as funções $x^\kappa(\tau)$. Elas descrevem o movimento de uma partícula no referencial da Terra com $g_{\mu\nu}$, isto é num sistema de coordenadas com um campo gravitacional. Como

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.10)$$

as forças gravitacionais que aparecem do lado direito da equação (3.8) resultam assim das derivadas dos potenciais $g_{\mu\nu}$. Uma rápida comparação com as equações do movimento do Eletromagnetismo mostra que os $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ correspondem aos campos $F^{\alpha\beta}$ e os $g_{\mu\nu}$ correspondem ao quadripotencial $A^\alpha = (\phi/c, \mathbf{A})$ onde ϕ é o potencial elétrico e \mathbf{A} o potencial vetor, que nos dão os campos elétrico e indução magnética via ¹

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

¹ A eletrodinâmica é discutida em detalhe no texto de Relatividade Restrita.

3.2 O limite Newtoniano

As equações do movimento no caso de uma partícula num campo gravitacional são conhecidas pela fórmula $m\ddot{\mathbf{r}} = -m\nabla\Phi(\mathbf{r})$ e nos levam à

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (3.12)$$

como bem sabemos. Se queremos que a TRG de Einstein faça sentido fisicamente falando, ela deve conter a gravitação Newtoniana da

mesma maneira que a TER contém como caso particular a mecânica Newtoniana. Vamos mostrar que as equações clássicas (no sentido de não relativísticas) da gravitação surgem da equação de movimento (3.8) no caso limite de campos gravitacionais fracos e estáticos e também para baixas velocidades $v \ll c$. Para isto escrevemos o tensor métrico na forma de um termo Minkowskiana mais uma perturbação

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

onde a premissa de *campos fracos* significa

$$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.14)$$

e a condição de baixas velocidades serão consideradas a seguir. Isto significa também que as coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^i)$ tem o significado usual (a menos de pequenos desvios) de variáveis num espaço de Minkowski. As grandezas $v^i = dx^i/d\tau$ são as componentes da velocidade da partícula e velocidades baixas significa

$$v^i \ll c \quad \text{ou} \quad \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}. \quad (3.15)$$

Com a aproximação de baixas velocidades temos, de (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} &= -\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -\Gamma^\kappa_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &\approx -\Gamma^\kappa_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Temos agora que calcular Γ^κ_{00} . Aplicando a definição

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} &= \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \\ \rightarrow \Gamma^\kappa_{00} &= \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como $g_{\mu\nu}$ é diagonal o único termo que sobrevive é

$$\Gamma^\kappa_{00} = -\frac{g^{\kappa\nu}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad (3.18)$$

Segundo nossa hipótese $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, e portanto mantendo apenas os termos em primeira ordem em h ficamos com

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa_{00} &= -\left(\frac{\eta^{\kappa\nu} + h^{\kappa\nu}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\underbrace{\eta_{00}}_{=1} + h_{00}) \\ \Gamma^\kappa_{00} &\approx -\frac{\eta^{\kappa\nu}}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \left(0, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1}, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^2}, \frac{\partial h_{00}}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

O primeiro termo na expressão acima é zero pois estamos partindo da hipótese que os campos são estáticos e portanto $\partial h_{00}/\partial x^0 = 0$. Com isto as equações do movimento se tornam

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (3.20)$$

Se $h_{00} = 2\Phi/c^2$ este resultado coincide com as equações de Newton para o movimento num campo gravitacional. Isto significa que

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2} \quad (3.21)$$

no limite Newtoniano de campos fracos. Notem que esta expressão é idêntica à obtida no capítulo 1 para o potencial centrífugo. Para termos uma idéia de quão boa é esta aproximação, vejamos os valores numéricos para alguns astros conhecidos:

$$\frac{2|\Phi|}{c^2} \approx \begin{cases} 1.4 \cdot 10^{-9} & \text{Terra} \\ 4 \cdot 10^{-6} & \text{Sol} \\ \sim 3 \cdot 10^{-4} & \text{Anã branca} \\ \sim 3 \cdot 10^{-1} & \text{Estrela de Nêutrons} \end{cases} \quad (3.22)$$

Os efeitos relativísticos de um buraco negro são tão fortes que não é possível tratá-lo na aproximação que acabamos de apresentar.

3.3 O tempo próprio

Nós podemos estudar o compasso de um relógio que se encontra em um satélite em órbita uma vez que, pelo nosso resultado anterior, temos

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.23)$$

para a métrica de um corpo a baixas velocidades e na presença de um campo gravitacional fraco e estático. O elemento de linha de um relógio, ds_{rel} determina o tempo próprio τ por ele mostrado:

$$d\tau = \frac{ds_{rel}}{c} = \frac{1}{c} \left(\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \right)_{rel} \quad (3.24)$$

Nesta expressão as coordenadas $x = \{x^\mu\}$ e dx^μ são as coordenadas do relógio. Uma mudança de coordenadas muda o lado direito da equação, não o intervalo $d\tau$ do tempo próprio do relógio. As coordenadas temporais na Terra são sempre expressas como $x^0 = ct$. A expressão acima nos dá a relação entre o tempo de coordenadas t na Terra e o tempo próprio τ do relógio a bordo do satélite. De um modo geral o compasso do relógio é determinado não apenas pelo campo

gravitacional ao qual ele está submetido como também pela velocidade relativa v deste em relação à Terra ². A gravidade é expressa em termos dos $g_{\mu\nu}$, as coordenadas da Terra pelos x^i . Consideremos dois casos especiais:

1. Não existe campo gravitacional e portanto o satélite é um RI com velocidade relativa v . Nesta caso temos um espaço de Minkowski, isto é $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Portanto, da TRE sabemos que

$$d\tau = \frac{1}{c} \left(\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \right)_{rel} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \text{(relógio em movimento sem campo gravitacional)}$$

O tempo t é o tempo de coordenada mostrado por relógios em repouso na Terra. Segundo esta expressão concluímos que relógios que se movem com velocidade constante andam *mais devagar* que relógios em repouso. Este resultado nada mais é que o fenômeno já por nós conhecido da *dilatação temporal* da TRE.

2. Para um relógio em repouso num campo gravitacional a expressão para $d\tau$ nos dá

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(x)} dt \quad \text{(relógio em repouso com campo gravitacional)}$$

Para um campo fraco e estático temos

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}} dt \quad \text{(relógio em repouso, } |\Phi| \ll c^2 \text{)} \quad (3.25)$$

Isto significa que um relógio num campo gravitacional é mais lento que na ausência de campo, pois o potencial gravitacional é negativo.

Quando os relógios se movem, temos que levar em conta dois efeitos. Por um lado, em relação a um relógio na superfície da Terra, um relógio num satélite em órbita é:

- i. *mais rápido* pois o campo gravitacional onde ele se encontra é mais fraco;
- ii. *mais lento* pois a velocidade do satélite é maior que de um relógio na superfície da Terra.

O sistema de georeferenciamento GPS tem que levar ambos os efeitos em conta. Na prática, para calcular o efeito, considera-se a velocidade de rotação da Terra em torno do próprio eixo para o relógio em Terra e a velocidade orbital do satélite em torno do nosso planeta, vistos de um RI que se move com velocidade praticamente constante ao longo da órbita da Terra em torno do Sol (durante algumas semanas podemos

² Este é o motivo pelo qual os relógios dos satélites do sistema GPS precisam sofrer duas correções relativísticas para que sua posição possa ser determinada com precisão pelas estações rastreadoras em solo.

considerar a velocidade orbital terrestre como sendo praticamente constante). Para satélites próximos da superfície como por exemplo a ISS a(400 km de altitude) o efeito (ii) é maior. Já para os satélites GPS (20.000 km de altitude) o efeito (i) predomina.

Consideremos um exemplo prático de um satélite de massa m que se encontra em uma órbita circular de raio r_0 no potencial gravitacional

$$V(r) = -\frac{GM_T m}{r} = m\Phi(r) \quad (3.26)$$

onde G é a constante gravitacional e M_T a massa da Terra. Um relógio a bordo do satélite marca o tempo t_S . Um relógio em repouso em $r \rightarrow \infty$ marca o tempo t_∞ . Vamos determinar aqui a relação entre os tempos medidos pelos relógios. Podemos inicialmente expressar o potencial gravitacional em termos da aceleração da gravidade na superfície $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ e o raio da Terra $R \approx 6370 \text{ km}$. Em termos destas grandezas podemos expressar o $\Phi(r_0)$ como

$$\Phi(r_0) = -\frac{gR^2}{r_0}. \quad (3.27)$$

A relação entre t_S e t_∞ segundo nosso resultado vale

$$\frac{t_S}{t_\infty} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2c^2}. \quad (3.28)$$

Na última expressão calculamos a velocidade de um satélite em órbita circular a uma distância r_0 do centro da Terra pela conservação de energia $v_0^2 = GM_T/r_0 = -\Phi(r_0)$. Portando o desvio δ devido ao efeito da dilatação do tempo vale

$$\delta_v = \frac{\Phi(r_0)}{2c^2} \quad (3.29)$$

Se olharmos agora para a contribuição devido ao potencial gravitacional fraco e estático (3.25) obtemos, após a expansão em série de Taylor, o valor

$$\delta_G = \frac{\Phi(r_0)}{c^2}. \quad (3.30)$$

A contribuição total devido aos dois efeitos relativísticos é

$$\frac{t_S}{t_\infty} = 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2c^2} + \frac{\Phi(r_0)}{c^2} = 1 + \frac{3\Phi(r_0)}{2c^2} = 1 - \frac{3gR^2}{2r_0c^2} \quad (3.31)$$

Se desprezarmos a contribuição relativística da velocidade do relógio sobre a superfície da Terra (velocidade de rotação $v_{rot} \approx 460 \text{ m/s}$) o tempo t_L medido em um laboratório na Terra em relação à um relógio infinitamente distante vale

$$\frac{t_L}{t_\infty} = 1 + \frac{\Phi(R)}{c^2} = 1 - \frac{gR}{c^2} \quad (3.32)$$

Portanto, o desvio relativo entre os tempos medidos por um satélite em órbita e um relógio na Terra vale

$$\frac{t_L - t_S}{t_L} = 1 - \frac{t_S}{t_L} = \frac{gR}{c^2} \left(\frac{3R}{2r_0} - 1 \right) \quad (3.33)$$

A escala deste desvio é determinada por $gR/c^2 \approx 7 \times 10^{-10}$. Para satélites próximos à superfície, isto é para $r_0 \approx R$ temos $t_S < t_L$. Isto significa que relógios de satélites em órbitas baixas andam mais devagar que relógios na superfície da Terra. Satélites geoestacionários tem $r_0 \approx 6.6 R$ (para satélites GPS este valor é aproximadamente $3.2 R$). Para estes satélites $t_S > t_L$, ou seja, seus relógios andam mais rápido. Se este efeito não fosse levado em conta, o sistema GPS acumularia um erro de aproximadamente 11 km/dia .

3.4 O desvio para o vermelho gravitacional

O resultado anterior tem uma consequência importante na Astrofísica: o desvio para o vermelho de sinais eletromagnéticos e portanto das linhas espectrais.

Vamos imaginar um campo gravitacional estático. Temos potenciais gravitacionais $g_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ que dependem da posição da fonte emissora mas não do tempo. Imaginemos que em \mathbf{r}_A uma fonte em repouso emite uma onda eletromagnética monocromática. Este sinal é observado em \mathbf{r}_B . Na fonte e no ponto de recepção, relógios em repouso mostram os tempos próprios

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)} dt_A, \quad d\tau_B = \sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)} dt_B \quad (3.34)$$

Consideremos como intervalos de tempo a duração entre 2 picos de onda, que saem de A e chegam em B . Nesta caso $d\tau_A$ e $d\tau_B$ são os períodos das oscilações em A e B e portanto o inverso da frequência:

$$d\tau_A = \frac{1}{\nu_A}, \quad d\tau_B = \frac{1}{\nu_B} \quad (3.35)$$

Porém, em termos de tempo de coordenada, o tempo entre dois picos na emissão é igual ao tempo entre picos na recepção, o que significa que $dt_A = dt_B$ e, combinando este resultado com as duas equações anteriores obtemos que a razão entre as frequências entre quem emite e quem observa vale

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_B)}{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} \quad (3.36)$$

A mudança na frequência é normalmente expressa em termos da grandeza adimensional z definida via

$$z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 \quad (3.37)$$

A grandeza z recebe o nome de *desvio para o vermelho* (*redshift*, *Rotverschiebung*). Desvios para o vermelho implicam $\lambda_B > \lambda_A$, ou seja $z > 0$. Resumindo

$$z = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_B)}{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} - 1 \quad \text{Redshift gravitacional} \quad (3.38)$$

Em geral há 3 efeitos que contribuem para o desvio do espectro eletromagnético:

1. O *efeito Doppler* devido ao movimento da fonte. Este efeito é tratado dentro da TRE.
2. O desvio para o vermelho *gravitacional*, devido ao campo gravitacional local.
3. O desvio para o vermelho *cosmológico*, devido à expansão do Universo. Neste caso o tensor métrico depende do tempo, como no caso da métrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

4

Aspectos geométricos: a idéia de curvatura

Discutimos aqui alguns aspectos geométricos da descrição do campo gravitacional por meio de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A dependência dos $g_{\mu\nu}$ nas coordenadas x^{μ} significam, de modo geral, que o espaço definido pelo elemento ds^2 é curvo. A trajetória de partículas livres neste espaço são chamadas de geodésicas e representam a menor distância entre dois pontos.

4.1 Curvatura do espaço

O elemento de linha em um espaço N -dimensional com coordenadas $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$ é dado pela expressão

$$ds^2 = g_{ik}(\mathbf{x}) dx^i dx^k. \quad (4.1)$$

Veremos brevemente como podemos determinar se este espaço é curvo ou não. Porém, para uma visão mais qualitativa, é possível tecer alguns comentários que nos indicam a possibilidade da métrica com a qual estamos trabalhando ser aquela de um espaço realmente curvo. Neste sentido voltemos à 2 dimensões onde conseguimos visualizar algumas conceitos mais básicos. Neste caso temos

$$ds^2 = g_{11}(x^1, x^2) (dx^1)^2 + 2g_{12}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 + g_{22}(x^1, x^2) (dx^2)^2 \quad (4.2)$$

Alguns exemplos por nós conhecidos são as coordenadas cartesianas no plano $(x^1, x^2) = (x, y)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (4.3)$$

plano este que pode ser também descrito por coordenadas polares $(x^1, x^2) = (\rho, \phi)$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (4.4)$$

ou, finalmente, as coordenadas esféricas $(x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$ sobre a superfície de uma esfera \mathbf{S}^2 de raio a

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.5)$$

A métrica em coordenadas polares pode ser obviamente transformada numa métrica cartesiana, pois trata-se da mesma geometria subjacente: o da superfície plana. Já a métrica sobre a superfície da esfera não, pois a superfície desta última é sabidamente curva. O que podemos depreender destes resultados é que

- i. o tensor métrico determina as propriedades do espaço, em particular sua curvatura;
- ii. a forma da métrica não é determinada pelas propriedades do espaço de maneira unívoca. Podemos na verdade optar por diferentes formas do tensor métrico dependendo da escolha de coordenadas que fazemos.

Vamos mostrar num exemplo simples como a métrica pode determinar a curvatura do espaço. Para isso imaginemos um espaço bidimensional com métrica $g_{ij}(x^1, x^2)$ e um ponto A a partir do qual, fazendo pequenos incrementos δx^1 e δx^2 , construiremos a superfície desejada. Vamos supor também que os g_{ij} mudem muito pouco com a mudança de x^1 para $x^1 + \delta x^1$ e de x^2 para $x^2 + \delta x^2$. Vamos atribuir arbitrariamente os valores $\delta x^1 = \delta x^2 = 1$. Tomemos o ponto A arbitrário como origem de nosso sistema de coordenadas ($x^1 = x^2 = 0$) e desenhemos duas linhas que determinam o conjunto de pontos sobre os quais $x^1 = 0$ e $x^2 = 0$ (v. figura ao lado).

Sobre a linha $x^2 = 0$ desenhamos a uma distância

$$\delta s_{AB} = \sqrt{g_{11}(0,0)}\delta x^1 = \sqrt{g_{11}(0,0)} \quad (4.6)$$

a linha $x^1 = 1$ (ponto B). Sobre a linha $x^1 = 0$ fazemos o mesmo, a uma distância

$$\delta s_{AC} = \sqrt{g_{22}(0,0)}\delta x^2 = \sqrt{g_{22}(0,0)} \quad (4.7)$$

determinando a linha $\delta x^2 = 1$ (ponto C). Ambas as linhas se encontram no ponto D a uma distância $\sqrt{g_{22}(1,0)}$ e $\sqrt{g_{11}(0,2)}$. Com isto, os quatro lados do quadrilátero $ABCD$ ficam determinados e a distância diagonal vale

$$\delta s_{AD} = \sqrt{g_{11}(0,0) + 2g_{12}(0,0) + g_{22}(0,0)} \quad (4.8)$$

o que determina o quadrilátero como superfície plana. De maneira análoga construímos os quadriláteros vizinhos aos segmentos \overline{BD} e \overline{CD} . Feito isso, restará um ângulo no ponto D que corresponde ao quadrilátero que falta completar. Este quadrilátero é também determinado pelos coeficientes métricos g_{ik} . De modo geral, so é possível construir este último quadrilátero se entortarmos os cantos \overline{BD} e \overline{CD} mas, ao fazer isto, saímos do plano. Resultado: a superfície é curva.

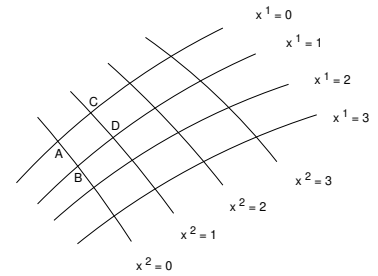


Figura 4.1: Como construir um espaço bidimensional com um dado $g_{ij}(x^1, x^2)$.

Se tomarmos o elemento geral (4.2) e o expandirmos obteremos, em primeira ordem, um plano. O próximo termo da expansão, quadrático, nos dá um elipsóide (hiperbolóide, parabolóide) que se “ajusta” de maneira ótima à superfície curva. Termos de ordem maior, e assim sucessivamente, vão se aproximando cada vez mais da superfície real. Resumindo, temos a seguinte conclusão:

Coordenadas cartesianas são possíveis \iff O espaço é plano

Disto segue que em espaços curvos não é possível usar coordenadas cartesianas. Porém, não basta olhar para a forma da métrica para saber isto: tomemos o exemplo de coordenadas polares para o \mathbb{R}^2 ou coordenadas esféricas para o \mathbb{R}^3 . Neste caso identificamos que as coordenadas são curvilíneas, mas não o espaço, pois estamos familiarizados com as transformações de coordenadas. De um modo geral, é difícil olhando para a métrica determinar se o espaço é curvo ou não. **Uma condição necessária mas não suficiente para que o espaço seja curvo é o fato do tensor métrico ser uma função das coordenadas.** Portanto podemos dizer

Espaço é curvo $\implies g_{ik}(x)$ é função das coordenadas

Notem na expressão acima o sentido da seta pois, como enfatizado antes, se g_{ik} depende das coordenadas não necessariamente o espaço é curvo. Deve haver no entanto uma maneira clara e objetiva de determinar, a partir da métrica, se o espaço é curvo. Isto se faz através do conceito de **tensor de curvatura**. A idéia é relativamente simples: como vimos em aula, o transporte paralelo de um vetor por uma curva fechada leva ao mesmo vetor caso o espaço seja plano. Ou seja, se o espaço é plano e transportarmos um vetor paralelamente a si mesmo, trazendo-o ao mesmo ponto de origem, a variação δv do vetor v será nula. Em outras palavras

$$\oint \delta v^i = 0 \quad (\text{espaço Euclideano}) \quad (4.9)$$

Por outro lado, se fizermos o mesmo mas ocorrer uma mudança no vetor, o espaço é curvo. Em outras palavras:

$$\oint \delta v^i \neq 0 \quad (\text{espaço curvo}) \quad (4.10)$$

Veremos com detalhes nos próximos capítulos como formalizar esta idéia por meio da definição da **derivada covariante**. O que é de se esperar é que se o espaço for curvo, a integral acima deve de alguma modo “sentir” esta curvatura, bem como ser proporcional à área que o caminho de integração encerra. Se fizemos a integral envolvendo uma área infinitesimal dA , obteremos

$$\oint \delta v_i = \oint \Gamma^k_{ip} v_k dx^p = -\frac{1}{2} R^k_{ipm} v_k dA^{pm} \quad (4.11)$$

A grandeza R^k_{ipm} é o chamado **tensor de curvatura de Riemann**. O termo dA^{pm} é a projeção do elemento de área dA no plano das coordenadas (x^p, x^m) . Esta expressão obviamente parece complicada mas veremos como chegar a ela baseados nos conceitos que já discutimos e que nos permite ter uma idéia clara do seu significado geométrico.

5

O transporte paralelo.

O conceito de transporte paralelo é muito importante na Física de espaços curvos pois as propriedades do vetor ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada determinam se o espaço em questão é plano ou curvo. Estudamos aqui este conceito com alguns detalhes e exemplos.

5.1 O transporte paralelo

O transporte paralelo em geometria diferencial está conectado à ideia da chamada *conexão afim* (*affine connection*). Basicamente é uma maneira de conectar diferentes planos tangentes sobre uma superfície curva de maneira suave, permitindo assim que grandezas físicas sejam diferenciadas. Os símbolos de Christoffel definem matematicamente uma conexão afim, motivo pelo qual são também chamados de *coeficientes afins* ou *coeficientes de conexão*. Como estamos interessados em aplicações na física, vejamos como estas ideias se refletem nas grandezas que nos interessam: vetores.

A diferencial total de um campo vetorial $A^i(x)$ é, segundo as regras usuais

$$dA^i = A^i_{,p} dx^p = A^i(x + dx) - A^i(x). \quad (5.1)$$

O ponto todo é se dA^i é um vetor ou não. A pergunta pode parecer estranha pois sempre definimos a diferença entre dois vetores como sendo um vetor. Porém, ao fazermos isto, esquecemo-nos de um detalhe importante: quando fazermos a diferença entre dois vetores em diferentes pontos do espaço, digamos P e Q , temos que transladar o vetor em Q até o ponto P onde se encontra o outro vetor e fazer a diferença. Como a definição de vetores é baseada em suas propriedades de transformação, pode ocorrer que $A^i(x + dx)$ e $A^i(x)$ obedeçam diferentes regras de transformação. Isto significa que as componentes de um vetor num ponto P mudem quando trasladamos este vetor para um ponto Q e portanto corremos o risco de usar o vetor 'errado' na hora de fazer a conta. Isso tem a ver com o fato que em espaços curvos

os vetores da base e_i variam em função das coordenadas. Isso vai um pouco contra nossa intuição de espaços planos com os quais lidamos até agora pois para fazer a diferença de vetores basta fazer diretamente a diferença das componentes. Fossem nossas coordenadas cartesianas, o processo é conhecido: se temos um vetor em x e outro em $x + dx$, deslocamos o primeiro vetor paralelamente a si mesmo até o ponto $x + dx$ e daí subtraímos os dois vetores componente a componente. Notem que neste processo podemos fazer a diferença “componente a componente” pois os versores que usamos para expressar os dois vetores são idênticos. Quando vamos para um espaço curvo, temos que garantir que o vetor transportado seja devidamente modificado para ‘descontar’ a mudança que não é devida a uma variação intrínseca do vetor mas sim da base que usamos para representá-lo. É neste sentido que devemos entender em espaços curvos a idéia de “transporte paralelo”. Um exemplo prático seria você se deslocar ao longo de um meridiano sobre a superfície da Terra em direção ao Polo Norte. Durante todo o deslocamento o vetor que dá sua direção e sentido de deslocamento é sempre o mesmo. Rigorosamente falando o vetor existe no plano tangente a superfície esférica do planeta, pois para existir na superfície ele teria que ser curvo, o que não faz sentido. A figura ao lado exemplifica um deslocamento paralelo de um vetor sobre a superfície de uma esfera imersa no \mathbb{R}^3 . Notem que para um ser bidimensional, que vive sobre a superfície da esfera, as componentes do vetor projetadas num eixo local não mudam e portanto o vetor não muda de direção: ele foi transportado paralelamente a si mesmo. Já para um ser tridimensional, a direção muda, o que pode ser visto pelas duas retas colineares com os vetores transladados, retas estas que se cruzam em um ponto do \mathbb{R}^3 . É importante notar que os livros geralmente usam geodésicas para ilustrar o transporte paralelo pois quando o transporte paralelo é feito sobre uma geodésica, o ângulo α entre a direção do vetor e da tangente à curva não muda. Caso o transporte paralelo seja feito sobre uma curva que não é geodésica, o ângulo α muda, como veremos nos exemplos ao final deste capítulo.

Temos que considerar que ao transladarmos um vetor os vetores da base mudam e devemos “descontar” esta mudança na hora de fazer as contas. Esta mudança será por nós chamada de δA^i :

$$\delta A^i = \begin{array}{l} \text{mudança de } A^i \text{ devido ao deslocamento paralelo por } dx \\ \text{devido à mudança da base} \end{array} \quad (5.2)$$

Com isto podemos calcular a diferença infinitesimal entre dois vetores no mesmo ponto

$$\begin{aligned} DA^i &= [A^i(x), \text{deslocado paralelamente}] - A^i(x) \\ &= A^i(x + dx) - \delta A^i - A^i(x) = dA^i - \delta A^i \end{aligned} \quad (5.3)$$

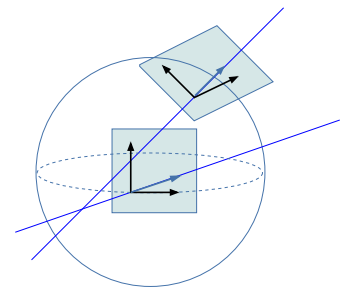


Figura 5.1: Um vetor é transportado paralelamente de um ponto sobre a superfície de uma esfera até outro, mantendo inalteradas as projeções do vetor sobre os eixos de coordenadas que definem o plano tangente. As linhas azuis, vistas por um ser em uma dimensão mais alta, mostram que o paralelismo é relativo apenas à superfície da esfera S^2 imersa no espaço tridimensional.

Esperamos que a grandeza δA^i seja proporcional às componentes A^k do vetor e dos incrementos dx^p . Podemos escrever esta mudança como sendo

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kp} A^k dx^p \text{ (deslocamento paralelo)}. \quad (5.4)$$

Os Γ são os nossos conhecidos símbolos de Christoffel, que dizem como os vetores da base mudam quando mudamos as coordenadas. O sinal de $-$ na expressão acima vem do fato que **vetores contravariantes mudam no sentido contrário à mudança da base**¹. A expressão acima define, na realidade, o deslocamento paralelo pois ela vem da expressão

$$\begin{aligned} DA^i &= A^i(x+dx) - \delta A^i - A^i(x) = [A^i(x+dx) - A^i(x)] - \delta A^i \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial x^p} dx^p - (-\Gamma^i_{kp} A^k dx^p) \\ &= (A^i_{,p} + \Gamma^i_{kp} A^k) dx^p \\ &= A^i_{;p} dx^p \end{aligned} \quad (5.5)$$

quando impomos que $dA^i = 0$. Notem que usamos na expressão acima a definição da derivada covariante

$$\begin{aligned} A^i_{;p} &= A^i_{,p} + \Gamma^i_{kp} A^k && \text{componente contravariante} \\ A_{i;p} &= A_{i,p} - \Gamma^p_{ik} A_p && \text{componente covariante} \end{aligned} \quad (5.6)$$

O sinal contrário da componente covariante se explica pelo fato que estas componentes mudam com o mesmo sinal da base, isto é

$$\delta A_i = \Gamma^p_{ik} A_p dx^k \text{ (deslocamento paralelo)}. \quad (5.7)$$

5.2 Outra abordagem

Uma outra maneira de ver o mesmo resultado foi discutida mais detalhadamente nas notas de aula sobre Relatividade Geral, mais especificamente no capítulo 2, na seção 2.2. Façamos aqui uma exposição breve. Sabemos que o símbolo de Christoffel Γ^i_{kp} mede a componente i da mudança do vetor de base \mathbf{e}_k quando variamos a coordenada x^p . Em outras palavras:

$$d\mathbf{e}_k = \Gamma^i_{kp} dx^p \mathbf{e}_i \quad (5.8)$$

Um exemplo seria a variação de um vetor de base \mathbf{e}_1 num espaço bidimensional com vetores de base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. A expressão acima se reduz à:

$$d\mathbf{e}_1 = \Gamma^1_{11} dx^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma^1_{12} dx^2 \mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{11} dx^1 \mathbf{e}_2 + \Gamma^2_{12} dx^2 \mathbf{e}_2 \quad (5.9)$$

¹ Isto é simples de visualizar. Imagine um vetor qualquer v no espaço bidimensional plano com coordenadas (x, y) . Quando rodamos os eixos de coordenadas por um ângulo θ , obtemos dois novos eixos rodados, (x', y') . Os versores desta nova base, \hat{i}' e \hat{j}' estão rodados por θ em relação aos versores originais \hat{i} e \hat{j} . O vetor v não sai do lugar, mas do ponto de vista do novo referencial, é como se v tivesse rodado por um ângulo $-\theta$. É neste sentido que dizemos que as componentes de um vetor contravariante mudam com a transformação contrária àquela dos vetores da base.

Para que fixemos bem a ideia vale a pena reforçar a definição:

$$\Gamma_{kp}^i = \begin{cases} kp \rightarrow & \begin{array}{l} 1^\circ \text{ subíndice: qual vetor da base varia } (\mathbf{e}_k) \\ 2^\circ \text{ subíndice: o quê varia (coordenada } x^p). \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{array}{l} \text{a componente da variação do vetor} \\ \text{(neste caso a componente na direção } \mathbf{e}_i). \end{array} \end{cases}$$

Quando variamos um vetor qualquer \mathbf{A} variando uma das coordenadas x^p temos que levar em conta não só a dependência funcional do vetor com a posição (um campo elétrico que varia no espaço por exemplo) como também a variação dos vetores da base, segundo a discussão acima. Logo temos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dx^p} = \frac{d(A^i \mathbf{e}_i)}{dx^p} = \underbrace{\frac{\partial A^i}{\partial x^p} \mathbf{e}_i}_{\text{var. das componentes}} + A^i \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^p}}_{\text{var. da base}}. \quad (5.10)$$

Quando incluímos neste resultado a variação dos vetores da base como definido em (??) obtemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dx^p} = \frac{\partial A^i}{\partial x^p} \mathbf{e}_i + A^i \Gamma_{ip}^k \mathbf{e}_k \quad (5.11)$$

Uma vez que índices somados são mudos, podemos no 2º termo da expressão acima fazer a troca $i \leftrightarrow k$, permitindo assim que escrevamos a expressão acima de forma mais compacta:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dx^p} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^p} \mathbf{e}_i + \underbrace{A^i \Gamma_{ip}^k}_{(i \leftrightarrow k)} \mathbf{e}_k \\ &= A^i_{,p} \mathbf{e}_i + A^k \Gamma_{kp}^i \mathbf{e}_i \\ &= \left[A^i_{,p} + A^k \Gamma_{kp}^i \right] \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (5.12)$$

O termo entre chaves é o resultado por nós obtido na seção anterior.

5.3 Exemplos de transporte paralelo no plano e na esfera.

Discutiremos aqui dois exemplos de transporte paralelo: o primeiro sobre um arco de círculo no plano e o segundo o deslocamento paralelo sobre a superfície de uma esfera. O primeiro caso é meramente ilustrativo pois sendo a superfície plana, poderíamos usar coordenadas cartesianas. A idéia porém neste caso é entender como o formalismo realmente reproduz o esperado.

Transporte paralelo no plano ao longo de um arco de circunferência.

A equação para o deslocamento paralelo da componente contravariante de um vetor \mathbf{A} é

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kp} A^k dx^p;$$

Como exemplo utilizaremos o vetor $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x$, transportado do ponto P ao ponto Q como na figura ao lado. Utilizaremos coordenadas polares:

$$x^1 = \rho, \quad x^2 = \phi \quad (5.13)$$

O elemento de linha nestas variáveis vale

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad (5.14)$$

de onde obtemos

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Precisamos achar os símbolos de Christoffel. Como eles são funções das derivadas parciais da métrica como função das coordenadas, a única derivada parcial diferente de zero dos g_{ik} é

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = 2\rho \quad (5.16)$$

Isto implica que há apenas 3 símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{g^{11}}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\rho \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{g^{22}}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\rho} \quad (5.17)$$

Como queremos transportar o vetor \mathbf{e}_x do ponto P ao Q utilizando coordenadas polares, precisamos antes expressar o vetor em termos dos vetores de base \mathbf{e}_ρ e \mathbf{e}_ϕ . Isto nos dá

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_1 - \frac{\sin \phi}{\rho} \mathbf{e}_2 = A^i \mathbf{e}_i \quad (5.18)$$

As componentes deste vetor são, claramente

$$A^1 = \cos \phi = \cos(x^2), \quad A^2 = -\frac{\sin \phi}{\rho} = -\frac{\sin(x^2)}{x^1} \quad (5.19)$$

O que podemos depreender imediatamente deste exemplo é que embora o vetor $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x$ seja constante e independente da posição onde se encontram, suas componentes variam com as coordenadas (ρ, ϕ) . Isto significa que $dA^i = A^i_{,p} dx^p = \partial A^i / \partial x^p dx^p$ não serve para medir a variação do vetor \mathbf{A} do ponto x até o ponto $x + dx$ em coordenadas polares. Em particular, ao deslocarmos-nos por

$$(dx^1, dx^2) = (d\rho, d\phi) = (0, d\phi) \quad (5.20)$$

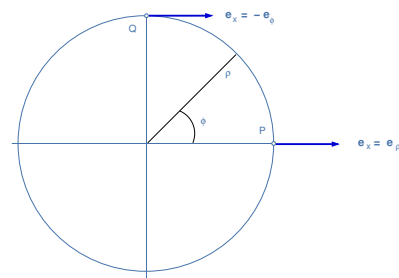


Figura 5.2: Transporte paralelo do vetor \mathbf{e}_x do ponto P ao ponto Q ao longo de um círculo.

obtemos

$$(dA^i) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p} dx^p \right) = \frac{\partial A^1}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial A^2}{\partial \rho} d\rho = \left(-\sin \phi - \frac{\cos \phi}{\rho} \right) d\phi \quad (5.21)$$

ao passo que

$$\begin{aligned} (\delta A^i) &= -\Gamma_{kp}^i A^k dx^p = -\Gamma_{22}^1 A^2 d\phi - \Gamma_{12}^2 A^1 d\phi \\ &= \left(-\sin \phi - \frac{\cos \phi}{\rho} \right) d\phi, \end{aligned} \quad (5.22)$$

de onde concluímos que a derivada covariante é zero pois:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i = 0 \quad (5.23)$$

Este resultado era esperado pois sabemos que o vetor \mathbf{e}_x é constante. Por questão de simplicidade, uma vez que ρ é constante, tomemos $\rho = 1$. Se agora fizermos todo o percurso, do ponto P ao ponto Q da figura, isto é

$$(x^i(P)) = (\rho, \phi) = (1, 0) \xrightarrow{d\rho=0} (x^i(Q)) = (\rho, \phi) = (1, \pi/2) \quad (5.24)$$

a mudança do vetor A^i ao longo deste caminho vale

$$\int (dA^i) = \int_0^{\pi/2} d\phi (-\sin \phi, -\cos \phi) = (-1, -1) \quad (5.25)$$

Este resultado significa que as componentes do vetor $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x$ mudam ao longo do caminho,

$$\begin{aligned} (A^1, A^2)_Q - (A^1, A^2)_P &= (-1, -1) \\ (A^1, A^2)_Q - (1, 0) &= (-1, -1) \\ (A^1, A^2)_Q &= (0, -1) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Já a mudança devido ao deslocamento paralelo segue de

$$\int (\delta A^i) = \int_0^{\pi/2} d\phi (-\sin \phi, -\cos \phi) = (-1, -1). \quad (5.27)$$

Portanto o vetor \mathbf{e}_x não muda se o movermos ao longo do quadrante de círculo pois $dA^i - \delta A^i = 0$, ou seja, os dois termos se cancelam.

Transporte paralelo sobre uma esfera.

Olhemos agora para o caso do transporte paralelo de um vetor sobre a superfície de uma esfera, como ilustra a próxima figura. O transporte será feito ao longo de uma curva de latitude constante, $\theta = \theta_0$.

A esfera de raio a é parametrizada pelas variáveis usuais $x^1 = \theta$ e $x^2 = \phi$, com as convenções usuais de $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. A métrica é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

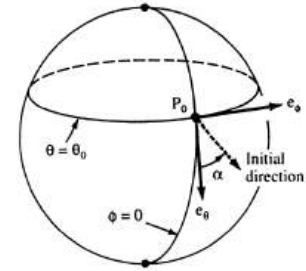


Figura 5.3: Um vetor é transportado paralelamente sobre a superfície de uma esfera. Fonte: Foster and Nightingale, *op. cit.*, p. 66.

Os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero são:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\sin\theta \cos\theta \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \cot\theta \quad (5.29)$$

Consideremos o transporte de um vetor \mathbf{v} arbitrário ao longo de um paralelo de latitude $\theta = \theta_0$ do ponto P_0 até a volta ao ponto de origem, ou seja entre $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$.

A equação paramétrica $\lambda^i(t)$ do círculo é dada por

$$\lambda^\mu(t) = \begin{cases} \lambda^1(t) = \theta_0 \\ \lambda^2(t) = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

o que implica que $d\lambda^1/dt = 0$ e $d\lambda^2/dt = 1$. Dados os valores para os símbolos de Christoffel, a equação do transporte paralelo de \mathbf{v} é

$$\dot{v}^\mu + \Gamma_{\nu 2}^\mu v^\nu = 0 \quad (5.30)$$

que nada mais é que um conjunto de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{v}^1 - \sin\theta_0 \cos\theta_0 v^2 = 0 & (v^1 = v^\theta) \\ \dot{v}^2 + \cot\theta_0 v^1 = 0 & (v^2 = v^\phi) \end{cases} \quad (5.31)$$

para as componentes v^1 e v^2 do vetor em questão. Para resolver este sistema de equações diferenciais precisamos de condições iniciais. Suponhamos que \mathbf{v} seja um vetor unitário e portanto

$$g_{\mu\nu} v^\mu(0) v^\nu(0) = 1 \quad (5.32)$$

e que ele faça um ângulo inicial α em relação ao meridiano N-S que passa pelo ponto P_0 , ou seja, sua componente projetada sobre o vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{a}\mathbf{e}_\theta$ que aponta na direção Sul em P_0 valha 2 :

$$g_{\mu\nu} v^\mu(0) e^\nu = \cos\alpha. \quad (5.33)$$

Estas duas equações nos dizem que as componentes de \mathbf{v} em P_0 são, respectivamente

$$\begin{aligned} v^1(0) &= \frac{1}{a} \cos\alpha \\ v^2(0) &= \frac{1}{a \sin\theta_0} \sin\alpha. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A solução de (5.31) com as condições iniciais acima vale

$$\begin{cases} v^1(t) = v^\theta(t) = \frac{1}{a} \cos(\alpha - \cos\theta_0 t) \\ v^2(t) = v^\phi(t) = \frac{1}{a \sin\theta_0} \sin(\alpha - \cos\theta_0 t). \end{cases} \quad (5.35)$$

Estas soluções nos dão o valor das componentes do vetor \mathbf{v} que é transportado paralelamente a si mesmo sobre qualquer ponto do círculo

² Consulte o Apêndice ?? acerca da normalização dos vetores \mathbf{e}_μ .

θ_0 . O resultado mais interessante é o valor que este vetor assume ao retornar ao ponto inicial P_0 , ou seja, quando $t = 2\pi$. Neste caso o resultado acima se reduz à

$$\begin{cases} v^1(2\pi) = v^\theta(2\pi) = \frac{1}{a} \cos(\alpha - 2\pi \cos \theta_0) \\ v^2(2\pi) = v^\phi(2\pi) = \frac{1}{a \sin \theta_0} \sin(\alpha - 2\pi \cos \theta_0). \end{cases} \quad (5.36)$$

Isto significa que ao completar o circuito o vetor continua sendo unitário, como pode ser facilmente comprovado calculando o produto escalar de $\mathbf{v}(2\pi)$ consigo mesmo

$$g_{\mu\nu} v^\mu(2\pi) v^\nu(2\pi) = 1. \quad (5.37)$$

No entanto, o produto escalar de $\mathbf{v}(0)$ com $\mathbf{v}(2\pi)$ dá:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} v^\mu(0) v^\nu(2\pi) &= \cos \alpha \cos(\alpha - 2\pi \cos \theta_0) + \sin \alpha \sin(\alpha - 2\pi \cos \theta_0) \\ &= \cos[\alpha - (\alpha - 2\pi \cos \theta_0)] \\ &= \cos(2\pi \cos \theta_0), \end{aligned} \quad (5.38)$$

ou seja, o vetor \mathbf{v} depois de transladado ao longo do círculo $\theta = \theta_0$ faz um ângulo $2\pi \cos \theta_0$ em relação à sua direção original. Por exemplo, para $\theta_0 = 85^\circ$ o giro do vetor é de 31.4° , ao passo que próximo ao polo norte, para $\theta_0 = 5^\circ$, o giro é de 1.4° .

Este último resultado ilustra um ponto bastante importante acerca do transporte paralelo: se $\theta_0 = \pi/2$, se a trajetória é ao longo do Equador, o vetor mantém sua orientação durante o traslado. O Equador é, entre todos paralelos, o único grande círculo, isto é uma geodésica. *Portanto, se um vetor é transportado ao longo de uma geodésica, o ângulo entre o vetor e a tangente à geodésica é constante.* Se pudéssemos cortar uma tira muito fina ao longo da geodésica e estendê-la sobre uma superfície plana, esta tira seria uma reta. O mesmo não ocorre para outros círculos sobre a superfície da esfera que não sejam grandes círculos. Um outro ponto importante deste resultado é para o caso quando percorremos uma curva fechada de dimensões relativamente pequenas, como no caso de $\theta_0 = 5^\circ$. Quanto menor a curva fechada, mais o giro do vetor se aproxima de 2π e portanto o desvio da direção original é quase imperceptível. Isto significa, fisicamente falando, que se nos restringirmos a uma área pequena da superfície, esta área parecerá quase plana e não conseguiremos detectar o fato que ela é na realidade curva. Portanto, experimentos para detectar a curvatura de superfícies só são possíveis considerando-se regiões grandes da superfície total.

5.4 A geometria

É possível entender estes resultados fazendo uma conexão entre geometria e física. Vamos para isto seguir as notas de Shifrin, que usa uma notação um pouco diferente daquela aqui empregada ³. Vamos

³ T. Shifrin, *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*, disponível em <http://alpha.math.uga.edu>.

usar o exemplo do transporte paralelo sobre a superfície da esfera para entender o porquê do vetor girar no sentido horário à medida que o transladamos ao longo do paralelo $u = u_0$.

Definamos o conjunto de vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ que definem os vetores tangentes nas direções das coordenadas (parâmetros) u e v . Neste caso vamos imaginar u sendo o parâmetro que define os meridianos e v os paralelos, isto é, em linguagem mais usual $u = \phi$ e $v = \theta$. Imaginemos também esta superfície imersa no \mathbb{R}^3 . Podemos definir um terceiro vetor \mathbf{n} unitário, a normal à superfície, segundo a conhecida fórmula

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}. \quad (5.39)$$

Os 3 vetores $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}\}$ formam uma base do \mathbb{R}^3 . Usando a notação $f_x^a = \frac{\partial f}{\partial x^a}$ e $f_{x^a x^b} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b}$ podemos, com um cálculo simples, mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\ \mathbf{x}_v &= (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u) = \mathbf{x}(u, v) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0) = -\sin u(\cos v, \sin v, 0), \end{aligned}$$

onde, por exemplo, \mathbf{x}_{uu} representa uma aceleração do vetor \mathbf{x}_u tangente a um meridiano. Como as curvas u são meridianos e as curvas v são paralelos, as respectivas acelerações \mathbf{x}_{uu} e \mathbf{x}_{vv} apontam na direção do centro da esfera e do centro do círculo (paralelo) definido por um valor de v . Isto está ilustrado na figura ao lado.

Afirmaremos aqui sem prova que, sendo $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}\}$ uma base do \mathbb{R}^3 , há funções $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uu}^v, \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u, \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v, \Gamma_{uu}^v, \Gamma_{vv}^v$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + \ell \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v + m \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v + n \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Uma vez que \mathbf{x}_{uu} aponta para o centro da esfera e portanto na direção $-\mathbf{n}$, por inspeção temos que $\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uu}^v = 0$. Podemos também ler diretamente os outros valores dos símbolos de Christoffel comparando diretamente os dois conjuntos de equações.

Queremos entender o resultado da seção anterior. Para isto olhemos a figura ao lado. A questão é se os vetores em P e Q são paralelos. Nossa resposta intuitiva seria que sim, mas não nos esqueçamos que eles são paralelos no espaço \mathbb{R}^3 mas não para um ser bidimensional que vive sobre a superfície da esfera. Para entender isto basta fazemos

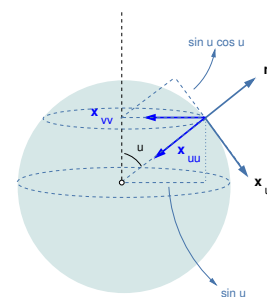
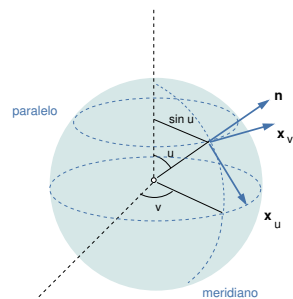


Figura 5.4: A direção dos vetores \mathbf{x}_{uu} e \mathbf{x}_{vv} na esfera.

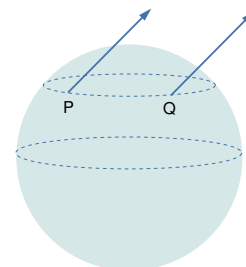


Figura 5.5: Seriam os dois vetores em P e Q paralelos?

a pergunta correta: dada uma curva λ e um campo vetorial X sobre ela definido. Seria correto dizer que os vetores são paralelos se sua derivada ao longo da curva λ é zero? A resposta é sim.

6

O tensor de curvatura de Riemann.

A métrica do espaço Riemanniano codifica a curvatura da variedade em cada ponto P . Na Teoria da Gravidade de Einstein a métrica $g_{\mu\nu}$ codifica a gravidade. Portanto curvatura e gravidade estão relacionadas. Definimos aqui o que se entende por curvatura em espaços N -dimensionais.

6.1 O rotacional

Nas discussões anteriores chegamos à seguinte conclusão: a curvatura do espaço se reflete no transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada. Se o espaço for curvo, haverá uma diferença entre o vetor inicial e o vetor final. Num espaço plano, a diferença entre os dois vetores é nula. A figura ao lado é um exemplo disso: se transportarmos um vetor paralelamente ao longo do contorno de uma superfície curva, ele retorna à posição inicial diferente.

Mas como calcular isto explicitamente? Calcular o deslocamento de um vetor ao longo de uma curva nos remete à conhecida definição da circulação C de um vetor \mathbf{B} ao longo de uma curva fechada C pelo deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r} = dx^\nu \mathbf{e}_\nu$

$$\text{Circulação} \equiv \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.1)$$

Quando esta circulação é realizada sobre uma curva infinitesimal no entorno de um ponto e subsequentemente dividida pela área circundada ΔS , obtemos a definição do rotacional

$$\nabla \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2)$$

Denotando o limite $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta S$ de dS e multiplicando ambos os lados da equação por dS obtemos

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (\text{rot } \mathbf{B})_n dS \quad (6.3)$$

que nada mais é que a versão infinitesimal do Teorema de Stokes. No caso, $(\text{rot } \mathbf{B})_n$ representa a componente do rotacional normal à superfí-

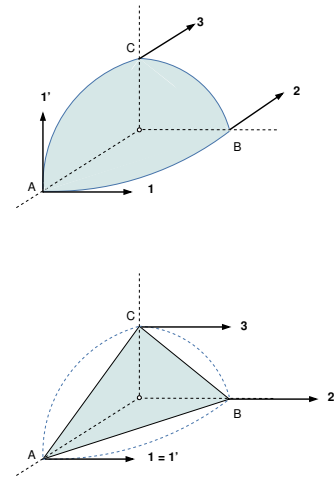


Figura 6.1: Um vetor $\mathbf{1}$ é transportado paralelamente do ponto A ao ponto B e daí até C. Ao retornar ao ponto original obtemos um vetor diferente $\mathbf{1}'$ sobre uma curva (painel superior) mas o mesmo vetor sobre uma reta (painel inferior). Transporte paralelo significa que o vetor mantém constante o ângulo com cada trecho da curva (reta), isto é sua componente ao longo de cada trecho é mantida constante.

cie dS .

Este é um resultado conhecido do Eletromagnetismo e corresponde justamente à passagem da formulação integral para a formulação diferencial da Lei de Ampère:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \frac{I}{\Delta S} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.4)$$

Nossa tarefa é generalizar este resultado para espaços de curvatura arbitrária em linguagem matemática. Gostaria antes de transcrever o texto de Grøn e Næss sobre o que nos espera ¹:

In the following we shall search for a consistent geometrical interpretation of the change of direction of a vector due to parallel transport around a closed curve. This will turn out to be rather involved since we are seeking a mathematical expression valid for curved surfaces generally, that is, for an overwhelmingly rich variety of surfaces. You are invited to take part in what might be called "index gymnastics". The equations in this section are relatively short and simple, but looking closely you will notice a bewildering change of indices. There is reason to suspect that Einstein, who felt he was a pure physicist, and never a mathematician, disliked this sort of gymnastics. But he saw no way to avoid it in his search for a relativistic theory of gravitation. So he not only learned it and mastered it. He also contributed to this part of the mathematics by inventing useful notation — as for example the Einstein summation convention.

¹ Øyvind Grøn e Arne Næss, *op. cit.*, p. 182.

Para conseguirmos atingir nosso intuito, lembremos inicialmente de um resultado por nós conhecido do cálculo vetorial. Quanto calculamos a circulação de um vetor por uma curva arbitrária em \mathbb{R}^3 temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = (\text{rot } \vec{B})_{\alpha\beta} \Delta S^{\alpha\beta} \quad (6.5)$$

ou, explicitamente

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} &= (\text{rot } \vec{B})_{xy} \Delta S^{xy} + (\text{rot } \vec{B})_{zy} \Delta S^{yz} + (\text{rot } \vec{B})_{zx} \Delta S^{zx} \\ &= (B_{y,x} - B_{x,y}) \Delta S^{xy} + (B_{z,y} - B_{y,z}) \Delta S^{yz} + (B_{x,z} - B_{z,x}) \Delta S^{zx} \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \Delta S^{xy} + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde ΔS^{ij} é a área que a curva projeta no plano ij ². Seguindo esta idéia podemos escrever diretamente

$$(\text{rot } \vec{B})_{\alpha\beta} = B_{\beta;\alpha} - B_{\alpha;\beta} \quad (6.7)$$

onde temos que generalizar a derivada parcial da nossa definição usual para a derivada covariante. Substituindo explicitamente a expressão da

² Um livro de física básica onde este cálculo é feita de maneira detalhada é o volume 3 da coleção Física Básica de Moyses Nussenzveig.

derivada covariante temos:

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \vec{B})_{\alpha\beta} &= B_{\beta,\alpha} - B_{\tau} \Gamma^{\tau}_{\beta\alpha} - (B_{\alpha,\beta} - B_{\tau} \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}) \\
 &= B_{\beta,\alpha} - B_{\alpha,\beta} - B_{\tau} \underbrace{(\Gamma^{\tau}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta})}_{=0} \\
 &= B_{\beta,\alpha} - B_{\alpha,\beta}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde na passagem da penúltima para a última linha usamos o fato que os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices. Portanto a expressão

$$(\text{rot } \vec{B})_{\alpha\beta} = B_{\beta,\alpha} - B_{\alpha,\beta} \tag{6.9}$$

vale em qualquer sistema de coordenadas.

6.2 Transporte paralelo e rotacional.

Basicamente a idéia é usar o rotacional conectando-o à curvatura do espaço. Porém, temos que garantir que o vetor foi transportado ao longo da curva C paralelamente a si mesmo. Para conseguirmos então conectar estas duas idéias, devemos seguir 3 passos:

1. definir o transporte paralelo de um vetor \mathbf{A} ao longo de uma curva fechada;
2. conectar a circulação definida acima com o rotacional;
3. identificar a curvatura no resultado.

Começemos assim com uma pequena área ΔS sobre uma superfície plana, como na figura ao lado

De novo, visando facilitar a discussão, consideremos um espaço plano com coordenadas curvilíneas. Os resultados que obteremos são, no entanto, gerais. O transporte paralelo sobre uma superfície plana não muda o vetor, ou seja $\Delta \mathbf{A} = 0$ e, no limite do deslocamento por uma curva infinitesimal

$$d\mathbf{A} = 0 \tag{6.10}$$

O mais curioso deste resultado é que – e é importante frisar este ponto – que ele vale também para espaços curvos! Isto parece uma contradição pois estamos partindo do ponto que o transporte paralelo é uma assinatura da curvatura. **Notemos porém que independente da curvatura do espaço, se um vetor é transportado por uma distância infinitesimal, o resultado acima afirma que em primeira ordem a variação é zero. São os termos em segunda ordem que contribuirão para fazer o transporte paralelo em espaços curvos algo diferente de zero.** Em outras palavras, o mudança de um campo vetorial por transporte paralelo não é visível se estivermos olhando apenas para as primeiras derivadas - a diferença surge no termo de segunda ordem. Este é o motivo pelo qual em 2

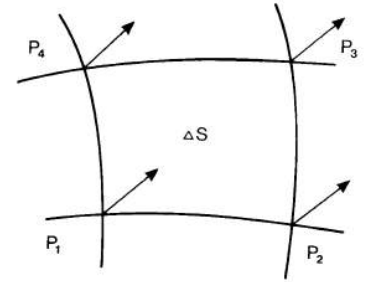


Figura 6.2: O transporte paralelo de um vetor no plano por um circuito fechado que circunscreve uma área ΔS . Para efeito de ilustração, estamos mostrando uma área plana com coordenadas curvilíneas. Fonte Grøn e Næss.

dimensões, quando queremos determinar a curvatura de uma curva $y = y(x)$ qualquer, sabemos que esta é proporcional à segunda derivada $y''(x)$. Vamos calcular $d\mathbf{A} = 0$ para cada uma de suas componentes covariantes, dA_μ . Usando nossa definição de derivada covariante temos, ao deslocarmos o vetor na direção dx^ν

$$A_{\mu;\nu} dx^\nu = 0 \quad (6.11)$$

Substituindo nossa definição de derivada covariante

$$A_{\mu;\nu} dx^\nu - A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu} dx^\nu = 0 \longrightarrow A_{\mu;\nu} = A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu} \quad (6.12)$$

e

$$dA_\mu = A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu} dx^\nu = B_{\mu\nu} dx^\nu \quad (6.13)$$

onde introduzimos a notação $B_{\mu\nu} = A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu}$ visando tornar o resultado mais claro. Calculemos agora a mudança total ΔA_μ do vetor ao longo de uma curva fechada, isto é

$$\Delta A_\mu = \oint dA_\mu = \oint B_{\mu\nu} dx^\nu \quad (6.14)$$

Isto pode ser escrito de maneira ainda mais familiar, se notarmos que podemos escrever

$$B_{\mu\nu} dx^\nu = \mathbf{B}_\mu \cdot d\mathbf{r} \quad (6.15)$$

onde \mathbf{B}_μ são vetores. Isto leva finalmente à

$$\Delta A_\mu = \oint \mathbf{B}_\mu \cdot d\mathbf{r} \quad (6.16)$$

que nada mais é que a expressão para a circulação de um vetor ao longo de um caminho fechado. Retornando agora à equação (6.16) podemos escrever

$$\Delta A_\mu = (\text{rot } \vec{B}_\mu)_{\alpha\beta} \Delta S^{\alpha\beta} = (B_{\mu\beta,\alpha} - B_{\mu\alpha,\beta}) \Delta S^{\alpha\beta} \quad (6.17)$$

Voltamos agora à notação original $B_{\mu\nu} = A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\nu}$ ficamos nesta expressão com

$$\Delta A_\mu = [(A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\beta})_{,\alpha} - (A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\alpha})_{,\beta}] \Delta S^{\alpha\beta} \quad (6.18)$$

Fazemos a derivada dos produtos $A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\beta}$ e $A_\tau \Gamma^\tau_{\mu\alpha}$ e substituímos no segundo e quarto termo da expressão resultante o índice mudo τ por ν . Isso nos deixa com a seguinte expressão:

$$\Delta A_\mu = (A_{\tau,\alpha} \Gamma^\tau_{\mu\beta} + A_\nu \Gamma^\nu_{\mu\beta,\alpha} - A_{\tau,\beta} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} - A_\nu \Gamma^\nu_{\mu\alpha,\beta}) \Delta S^{\alpha\beta} \quad (6.19)$$

Agora, nos sabemos da equação (6.12) que podemos escrever $A_{\tau,\alpha} = A_\nu \Gamma^\nu_{\tau\alpha}$ e $A_{\tau,\beta} = A_\nu \Gamma^\nu_{\tau\beta}$. Substituindo estas expressões na equação acima ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu = & (A_\nu \Gamma^\nu_{\tau\alpha} \Gamma^\tau_{\mu\beta} - A_\nu \Gamma^\nu_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} \\ & + A_\nu \Gamma^\nu_{\mu\beta,\alpha} - A_\nu \Gamma^\nu_{\mu\alpha,\beta}) \Delta S^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Colocando a componente A_ν em evidência chegamos finalmente à

$$\Delta A_\mu = (\Gamma^\nu_{\tau\alpha} \Gamma^\tau_{\mu\beta} - \Gamma^\nu_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\beta,\alpha} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha,\beta}) A_\nu \Delta S^{\alpha\beta} \quad (6.21)$$

O termo entre parênteses é o chamado *tensor de curvatura de Riemann*. Ele é um tensor de 4ª ordem com componentes definidas via

$$R^\nu_{\mu\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\tau\alpha} \Gamma^\tau_{\mu\beta} - \Gamma^\nu_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\beta,\alpha} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha,\beta} \quad (6.22)$$

Podemos escrever esta expressão como encontrada em outros livros na forma

$$R^\nu_{\mu\alpha\beta} = \partial^\alpha \Gamma^\nu_{\mu\beta} - \partial^\beta \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\nu_{\tau\alpha} \Gamma^\tau_{\mu\beta} - \Gamma^\nu_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\mu\alpha}. \quad (6.23)$$

Portanto a variação da componente μ do vetor ao longo de uma curva fechada vale

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\alpha\beta} A_\nu \Delta S^{\alpha\beta}. \quad (6.24)$$

Um cálculo análogo para as componentes contravariantes do vetor levam à

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\nu \Delta S^{\alpha\beta}. \quad (6.25)$$

O fator $\frac{1}{2}$ vem pelo fato que ao somarmos em α, β , contamos duas vezes a mesma superfície, por exemplo surge um termo ΔS^{xy} e ΔS^{yx} que se referem, obviamente, à mesma superfície. Em função desta dupla contagem somos forçados e multiplicar o resultado pelo fator $\frac{1}{2}$. Nossa conclusão é que a *mudança de um vetor por transporte paralelo ao longo de uma curva fechada é proporcional à curvatura do espaço multiplicada pela área circunscrita pela curva*.

Sejamos bastante claros em um ponto: este resultado é algo puramente matemático e não tem qualquer relação com a física. Esperar que apenas olhando para esta profusão de índices consigamos ver algo de gravitação seria um exercício de imaginação sem qualquer justificativa mais fundamentada: não há nada que conecte uma à outra. Foram necessários 10 anos, de 1906 a 1916, para que Einstein conseguisse associá-las. O que devemos guardar deste resultado é que um transporte paralelo de um vetor por uma curva fechada – em outras palavras, a circulação do vetor – leva a uma mudança neste vetor *caso o espaço seja curvo*. Tomando a circulação infinitesimal, que nada mais é que o rotacional do vetor por unidade de área, chegamos a uma relação dada pela equação (6.24) ou (6.25). Segundo Øyvind e Næss:

The result expressed in equation (9.3) [6.24] is purely mathematical. It concerns the curvature of curved surfaces and curved spaces. The 'theorem egregium' of Gauss is contained in Eq. (9.28) [6.21], since the values of the Christoffel symbols and their derivatives are defined 'intrinsically', i.e. without reference to any higher-dimensional space which the one with curvature $R^\nu_{\mu\alpha\beta}$ could be embedded in. Due to its mathematical character this theorem needs no empirical

support, it tells nothing about the physical world. The geometrical theory can be developed abstractly as a non-geometrical, logical system. The terms 'vector', 'point', 'coordinate', and 'path' are then introduced without any reference to a physical space that we might be said to live in. Drawings on a paper are of no significance for the deductions. Drawings are only of heuristic value. However, some equations of the abstract system can be made to correspond to certain empirically studied physical relationships. If we construct a theory which, for example, through certain equations, successfully predicts how light moves in flat spacetime, and also in curved spacetime, we would talk of a physical spacetime, whose geometrical properties we then can investigate empirically. The general theory of relativity is just such a theory. This makes it meaningful to talk about the geometry of physical spacetime. We shall further on be talking about a four-dimensional model of the universe where we are born and presumably are going to die. But the level of abstraction will be astonishing. Abhorrent and frightening to some, awesome to others. The so-called Einstein equations, superceeding Newton's, require skyhigh levels of abstraction. The question is unavoidable: will humanity never get back to a fairly easily understandable, but grand theory of the universe of the Newtonian kind? For those who hope to see a trend in that direction, the development of this century has been discouraging.³

³ Øyvind Grøn e Arne Næss, *op. cit.*, p. 186.

6.3 Alguns resultados importantes

Para nossa sorte, a Física é descrita por escalares (tensores de rank 0), vetores (tensores de rank 1) e tensores de rank 2. Exemplos de tensores de rank 2 são a susceptibilidade magnética de materias anisotrópicos e o momento de inércia para corpos assimétricos. Isto significa que o tensor de Riemann, como o vimos, não entra diretamente nas equações da Relatividade Geral mas contrações dele.

Um tensor de ordem 4 tem N^4 componentes, onde N é a dimensão do espaço. No caso de um espaço quadridimensional, isto significa que teríamos 256 diferentes números para calcular. Porém, as simetrias reduzem este número para 20. A prova que o tensor, como definido, tem simetrias, é um exercício matemático simplesmente e não tem a ver com a Física. Esta redução se deve à uma propriedade dos índices chamada de propriedade cíclica

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} = 0 \quad (6.26)$$

que reduz o número N^4 para $N^2(N^2 - 1)/12$ (no espaço-tempo quadridimensional $N = 20$). Uma outra propriedade importante é que se somarmos no índice a (contração), obtemos

$$R^a_{acd} = 0 \quad (6.27)$$

que pode ser deduzida da antissimetria $R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$ (troca do último par de índices). Se contrairmos porém o tensor na forma

$$R^a_{bac} = R_{bc} \quad (6.28)$$

obtemos um tensor de 2ª ordem, o chamado **tensor de Ricci**. Podemos definir então

$$R_{ab} = R^i_{aib} \quad (\text{Tensor de Ricci}). \quad (6.29)$$

Este tensor é simétrico nos índices $R_{ab} = R_{ba}$ e é ele que aparece nas famosas equações de campo de Einstein. É com ele que lidaremos mais à frente no curso. Uma outra definição é a da *curvatura escalar*

$$R = g^{ab} R_{ab} = R^a_a \quad (6.30)$$

termo este que também aparece nas equações de Einstein.

7

O tensor energia-momento e a hidrodinâmica relativística

Até agora nos preocupamos em entender a idéia de espaços curvos, como determinar a curvatura e como fazer cálculo sobre variedades Riemannianas. Esta é a primeira parte da Relatividade Geral. A segunda parte está relacionada à ideia que massa e energia são as fontes de campos gravitacionais ou, em outras palavras, determinam a métrica do espaço-tempo. O objetivo agora é determinar, matematicamente falando, como isto ocorre. Isto significa achar a equação que relaciona o tensor $g_{\mu\nu}$ com o conteúdo de massa e energia do espaço. Como $g_{\mu\nu}$ é um tensor de ordem 2, a conteúdo de energia e massa deve também ser expresso na forma de um tensor de ordem 2. Assim, antes de chegarmos às equações de Einstein, discutiremos um dos modelos mais importantes para uma distribuição de massa: a de um fluido ideal relativístico. O movimento de um fluido ideal clássico é determinado pelas equações de Euler e a equação da continuidade. A generalização para o caso relativístico é discutida neste capítulo.

7.1 Poeira cósmica e estrelas: fluidos ideais

A teoria Einsteiniana para a gravitação é conceitualmente diferente da teoria Newtoniana, pois segunda aquela não apenas a massa mas também a energia são fontes dos campos gravitacionais. Neste sentido, a questão que nos cabe resolver é: como representar a massa e a energia na forma de uma grandeza e como elas entram nas equações? Mais concretamente falando, se estamos atrás de uma equação para um tensor de ordem $g^{\mu\nu}$ de ordem 2, a fonte também deve ser representada na forma de um tensor $T^{\mu\nu}$ de mesma ordem. Mas como fazer isso?

Primeiro temos que pensar no tipo de massa/energia que temos que modelar. Em se tratando de escalas típicas da Astrofísica, estamos pensando em quantidades grandes de massa, seja ela em escala cosmológica para assim determinar a estrutura espaço-temporal de todo o universo, seja ela para representar uma estrela e seu entorno. Quando à questão

da energia, a forma mais simples que esta assume é aquele de partículas não interagentes e que portanto só têm energia cinética. Portanto a distribuição mais simples para estas grandes quantidades de massa é a de um conjunto de partículas não interagentes, mais precisamente a de um fluido ideal (sem viscosidade ou invíscido). Por este motivo todos os textos de Relatividade Geral tratam da chamada hidrodinâmica relativística de fluidos ideais. A ideia que conceitos de Hidrodinâmica possam desempenhar um papel importante na Relatividade Geral pode nos parecer estranha inicialmente, mas uma análise mais profunda nos convence que gases 'bem comportados' são os modelos mais simples de tratarmos analítica e numericamente. A não viscosidade do fluido garante que não tenhamos que levar em conta efeitos dissipativos efeitos dissipativos.

Fluidos ideais requerem, para sua descrição, apenas três grandezas: a densidade de massa $\rho_0(\mathbf{r}, t)$, um campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v^i \mathbf{e}_i$ para descrever seu movimento e uma pressão $P(\mathbf{r}, t)$ (ou tensão) isotrópica. Quando o fluido é tão tênue que não exerce pressão, temos a chamada *poeira cósmica*, usada para modelar o espaço interestelar como um todo. Os fluidos que exercem pressão são usados na descrição de estrelas.

Considerando assim uma grande quantidade de partículas não interagentes, poderíamos – a exemplo de alguns livros – tentar escrever diretamente o tensor energia–momento de ordem 2 na forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu \quad (7.1)$$

e a razão para isto é muito simples: um gás não interagente só tem energia cinética, que sabemos ser proporcional à v^2 . Como estamos falando de Relatividade, substituímos a velocidade \mathbf{v} pela quadrivelocidade $\mathbf{u} = (u^0, u^1, u^2, u^3)$ e a expressão acima é o tensor de ordem 2 mais simples que podemos construir a partir das componentes u^μ da quadrivelocidade. Esta, por exemplo, é a abordagem usada por D'Inverno ¹ e outros autores. Nesta expressão ρ_0 representa a densidade de massa própria, ou seja, aquela medida por um observador que se move junto com o fluido.

Vamos adotar aqui uma abordagem um pouco diferente, mais *bottom-up*: consideremos primeiro a descrição clássica de Euler.

7.1.1 A dinâmica Euleriana de fluidos

Um elemento de massa Δm do fluido sob ação de uma força externa obedece, pela 2ª Lei de Newton, a equação $\Delta m d\mathbf{v}/dt = \Delta \mathbf{F}_N$. Uma vez que queremos uma descrição da física em termos locais, isto é, de uma equação diferencial, introduzimos a densidade de massa $\rho_0 = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta m / \Delta V$ para um pequeno elemento de volume sobre o qual

¹ Ray D'Inverno, *Introduction to Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1998, p. 155.

atua a densidade de força $\Delta \mathbf{F}_N / \Delta V$. A densidade de força tem duas componentes: uma é dada pelo negativo do gradiente de pressão $-\nabla P$ e outra as forças externas \mathbf{f}_0 , como por exemplo força peso $\mathbf{f}_0 = \rho \mathbf{g}$. Temos assim, em um caso mais geral, a expressão da densidade de força $\mathbf{f}_N = -\nabla P + \mathbf{f}_0$.

Quando acompanhamos a evolução de uma grandeza física $\varphi(\mathbf{r}, t)$ que caracteriza um pequeno elemento de volume do fluido, a grandeza pode variar devido a dois fatores: por um lado $\varphi(\mathbf{r}, t)$ pode depender explicitamente do tempo. Por outro, num dado tempo dt o elemento de volume se move por $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ e $\varphi(\mathbf{r}, t)$ depende da posição \mathbf{r} . Um exemplo disto é o fluxo em um rio: uma chuva pode aumentar temporariamente a velocidade de escoamento mas também, em partes mais estreitas do rio, o fluxo aumenta pela incompressibilidade da água. Disto segue que a diferencial *total* de $d\mathbf{v}(x, y, z, t)$ é composta de dois termos: a derivada local $\partial/\partial t$ e a derivada *convectiva* que depende de \mathbf{r}

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) dt. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Esta derivada é conhecida como **derivada material** em Mecânica de Fluidos. Considerando agora a segunda lei de Newton $\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}_N$ chegamos à famosa Equação de Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_0. \quad (7.3)$$

Uma vez que a massa é conservada temos também a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (7.4)$$

Juntas, a equação de Euler e da continuidade são as equações não relativísticas que descrevem o campo de velocidades de um fluido ideal. Na verdade estas 4 equações não são suficientes para determinar as 5 incógnitas de interesse: os 3 campos v^i , a pressão P e a densidade ρ . Por isto é necessário uma equação adicional: a equação de estado que relaciona P a ρ (no caso de estrelas, como veremos adiante, sempre precisamos de uma equação de estado termodinâmica que relacione P e ρ). Poderíamos por exemplo ter $\rho = \text{constante}$ para um fluido incompressível ou $P = \text{constante} \times \rho$ para um gás ideal a uma temperatura T fixa. Com estas informações é possível determinar a dinâmica do fluido e as grandezas que o caracterizam.

Nosso objetivo agora é obter uma generalização destas equações para a Relatividade Restrita, ou seja, escrevê-las em termos de tensores no espaço de Minkowski de modo que elas sejam também válidas na TRG. Dentro desta reformulação encontraremos o chamado *tensor das*

tensões (*stress tensor*) que representará, na Relatividade Geral, a fonte de campo gravitacional.

7.2 Fluido relativístico

Nosso objetivo agora é generalizar os resultados anteriores para um cenário relativístico quadridimensional. A primeira coisa a notar é que devemos substituir o campo de velocidades usual das equações acima pela campo de velocidades Lorentziano (quadrivelocidade)

$$(u^\alpha) = \gamma (c, v^i) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.5)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é o fator de Lorentz e v^i representa as componentes da velocidade usual ². Apenas para que lembremos da definição de quadrivelocidade, temos:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2} dt} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (7.6)$$

Como o termo do lado esquerdo da equação de Euler é quadrático em v , introduzimos a matriz $M^{\alpha\beta}$ definida segundo

$$M^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta \quad (7.7)$$

onde a densidade de massa ρ_0 é definida via

$$\rho_0 = \frac{\text{massa de repouso}}{\text{elemento de volume}} = \frac{\Delta m_0}{\Delta V_0} \quad (7.8)$$

ou seja, e a densidade de massa para cada elemento de volume de fluido medida num referencial inercial do centro de massa do elemento. Por este mesmo motivo ΔV_0 representa o elemento de volume visto pelo observador que se move com a massa. Com estas definições, se substituirmos em $M^{\alpha\beta}$ as expressões explícitas dos u^α ficamos com uma expressão em termos das velocidades v^α na forma

$$(M^{\alpha\beta}) = \rho_0 \gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & v^1/c & v^2/c & v^3/c \\ v^1/c & v^1 v^1/c^2 & v^1 v^2/c^2 & v^1 v^3/c^2 \\ v^2/c & v^1 v^2/c^2 & v^2 v^2/c^2 & v^2 v^3/c^2 \\ v^3/c & v^1 v^3/c^2 & v^2 v^3/c^2 & v^3 v^3/c^2 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Se definirmos ρ como a densidade vista de um observador parado segundo

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 \quad (7.10)$$

ficamos finalmente com

$$(M^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^1 & \rho c v^2 & \rho c v^3 \\ \rho c v^1 & \rho v^1 v^1 & \rho v^1 v^2 & \rho v^1 v^3 \\ \rho c v^2 & \rho v^1 v^2 & \rho v^2 v^2 & \rho v^2 v^3 \\ \rho c v^3 & \rho v^1 v^3 & \rho v^2 v^3 & \rho v^3 v^3 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

² Lembremo-nos que no limite de baixas velocidades a quadrivelocidade se torna $(u^\alpha) \xrightarrow{v \ll c} (c, v^1, v^2, v^3)$ pois neste limite $\gamma \rightarrow 1$.

Nesta forma fica fácil entender por que alguns chamam esta grandeza de *tensor densidade de massa-energia* ou *tensor de energia cinética-momento*: da Relatividade Restrita temos a célebre expressão $E = m(v)c^2$ onde $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ é a conhecida massa relativística que muda com a velocidade. A grandeza m_0 representa a massa de repouso ³. A interpretação física de $M^{\alpha\beta}$ é direta: para uma pessoa que observa o elemento de volume ΔV_0 se movendo com velocidade v , há um aumento da densidade devido ao aumento relativístico da massa Δm_0 com v bem como uma diminuição do volume pela contração de Lorentz na direção do movimento. Em outras palavras, do ponto de vista do referencial parado Δm_0 aumenta e ΔV_0 diminui. Deste modo

$$\rho = \frac{\Delta m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\Delta V_0 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma^2 \frac{\Delta m_0}{\Delta V_0} = \gamma^2 \rho_0 \quad (7.12)$$

que é idêntico ao resultado que acabamos de definir acima. Para obtermos agora a generalização da Equação de Euler para o caso relativístico precisamos apenas entender como se define o divergente neste caso. A definição e o significado físico de um divergente é bastante conhecida:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} = F^i_{,i} = F^i_{|i} \quad (7.13)$$

Esta definição se aplica a um espaço plano. A generalização para espaços de Riemann é imediata: basta substituímos a derivada parcial pela derivada covariante:

$$\text{div } \mathbf{F} = F^{\mu}_{;\mu} = F^{\mu}_{||\mu} \quad (7.14)$$

Quando generalizamos este resultado para um tensor $T^{\mu\nu}$ temos

$$(\text{div } T)^{\mu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{||\nu} \quad (7.15)$$

Notem que “sobra” um índice μ na expressão acima pois o divergente de um tensor de ordem 2 resulta num tensor de ordem 1 (vetor) da mesma maneira que o divergente de um tensor de ordem 1 resulta num tensor de ordem 0 (escalar).

Como estamos tratando aqui do espaço de Minkowski podemos aplicar diretamente a definição do divergente ao tensor $M^{\alpha\beta}$:

$$(c\partial_t, \partial_k)M^{0\beta} = c[\partial_t \rho + \partial_k(\rho v^k)] \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} (c\partial_t, \partial_k)M^{i\beta} &= \partial_t(\rho v^i) + \partial_k(\rho v^i v^k) \\ &= \rho(\partial_t v^i + v^k \partial_k v^i) + v^i[\partial_t \rho + \partial_k(\rho v^k)] \end{aligned} \quad (7.17)$$

No caso de um fluido livre, na ausência de forças ou pressões, ficamos assim com

$$\partial_{\beta} M^{0\beta} = 0 \quad \text{Equação da continuidade} \quad (7.18)$$

$$\partial_{\beta} M^{i\beta} = 0 \quad \text{Equação de Euler sem forças} \quad (7.19)$$

³ É importante lembrarmos que alguns autores denotam a massa de repouso pela letra m enquanto outros usam a notação m_0 . Isso pode gerar uma certa confusão. Por isto é importante lembrarmos desta definição quando passamos de um texto para outro. Uma maneira de lembrar a diferença é olhar para a famosa equação $E = mc^2$. O m desta equação é sempre a massa relativística $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$

Se preferirmos podemos escrever estas 4 equações de forma resumida:

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.20)$$

Fisicamente, a primeira equação representa a equação de continuidade para a densidade de energia ao passo que a segunda é a lei de conservação da densidade de momento. Precisamos agora entender como introduzir forças nesta equação. Veremos isso a seguir.

7.3 O tensor de tensões

O tensor de tensões da hidrodinâmica é o termo que contém as forças que atuam sobre um fluido. Sua interpretação geométrica é simples: dada um elemento de volume de fluido (v. figura ao lado) a tensão é definida como *força por unidade de área*. No caso do fluido, esta tensão pode ter componentes normais às superfícies que delimitam o volume bem como componentes tangenciais às mesmas. A componente normal é a *pressão*, ao passo que a tangencial é chamada de *tensão de cisalhamento*⁴. O tensor de tensões normalmente é escrito como um tensor de ordem 2

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

O tensor das tensões é simétrico, isto é $T^{ij} = T^{ji}$. Isto ocorre pois as tensões de cisalhamento geram um giro do elemento de fluido em torno dos eixos ordenados e não fosse o tensor simétrico, um elemento atuado por exemplo por um $T^{xy} \neq T^{yx}$ giraria cada vez mais rápido em torno do eixo z . Como isto não é observado na natureza devido à viscosidade, estes termos são iguais. Num fluido ideal – sem viscosidade – os termos não diagonais devem ser todos nulos. Inclusive esta é uma definição equivalente para fluidos ideais: **fluidos ideais são aqueles que não admitem tensões de cisalhamento**. As tensões normais são as pressões, isto é $T^{xx} = P^x$, $T^{yy} = P^y$ e $T^{zz} = P^z$. Para um fluido ideal a pressão é isotrópica, isto é $P^x = P^y = P^z = P$ e portanto renomeando T^{ij} para P^{ij} temos

$$P_{\text{fluido ideal}}^{ij} = P\delta^{ij} \quad (7.22)$$

onde δ^{ij} é o delta de Kronecker. Temos agora que tentar generalizar isto para 4 dimensões. Essa generalização é simples mas exige um certo cuidado, pois embora a pressão P seja um escalar de Lorentz, isto é, tem o mesmo valor em qualquer RI no qual for medido (como a massa de repouso), nossa generalização para um tensor deve seguir as regras das transformações de Lorentz. Além disso a expressão acima foi definida para um referencial que se move com o elemento de fluido

⁴ Tecnicamente são conhecidas como *normal stress* e *shear stress*, respectivamente.

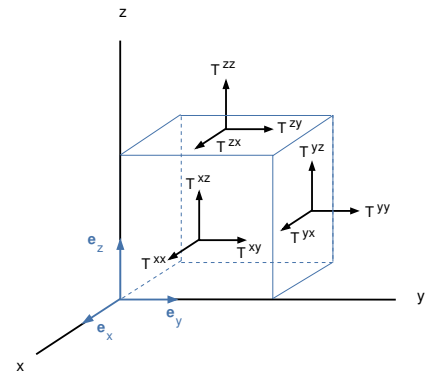


Figura 7.1: Representação gráfica do tensor de tensões T^{ij} em coordenadas cartesianas. As tensões (*stresses*) paralelas às superfícies são chamadas de tensões de cisalhamento (*shear stress*). As tensões restantes são simplesmente chamadas de tensões *normais*.

e para um espaço cartesiano de métrica $(1, 1, 1)$. Portanto na verdade esta pressão definida acima na verdade deve ser escrita como

$$P_{\text{fluido ideal}}^{ij} = P\delta^{ij} \quad (7.23)$$

evidenciando que este tensor é definido para um referencial com velocidade \mathbf{v} em relação a um referencial parado. Olhando para a equação de Euler vemos que ali aparece um termo de pressão, termo este que não aparece na equação da continuidade (relacionada à primeira linha $M^{0\beta}$ do tensor). Devemos então acrescentar à equação um termo $\partial_i P = \partial_j P^{ij}$ mantendo o termo correspondente à primeira linha (coluna) nulos, isto é

$$(P'^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

Para acrescentar este termo à Equação de Euler com $M^{\alpha\beta}$ temos que fazer a transformação deste tensor do RI do líquido para o RI do laboratório, onde seja, uma transformação de Lorentz com o fator $-\mathbf{v}$, ou seja

$$P^{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} P'^{\gamma\delta} \quad (7.25)$$

onde para efeito de cálculo podemos usar as transformações de Lorentz especiais

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha}(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & 0 & 0 \\ \gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

Um pouco de álgebra nos leva finalmente à

$$P^{\alpha\beta} = P \left(\frac{u^{\alpha} u^{\beta}}{c^2} - \eta^{\alpha\beta} \right) \quad (7.27)$$

onde $\eta^{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço de Minkowski. Acrescentamos assim do lado esquerdo da equação de Euler:

$$\partial_{\beta} M^{\alpha\beta} + \partial_{\beta} P^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.28)$$

que nada mais é que a generalização da equação para o caso relativístico sem a presença de forças externas. É mais comum escrevê-la na forma

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.29)$$

onde $T^{\alpha\beta}$ é o famoso **tensor energia-momento**

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^{\alpha} u^{\beta} - \eta^{\alpha\beta} P \quad (7.30)$$

Talvez valha a pena recordar alguns fatos da mecânica de fluidos que tornam a expressão acima mais palatável. Em função da identidade vetorial

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (7.31)$$

a equação de Euler pode ser escrita como

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) = -\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + P \right). \quad (7.32)$$

Se o fluido é irrotacional, a equação de Euler se resume à

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + P \right). \quad (7.33)$$

O termo $\frac{1}{2} \rho v^2$ é chamado de pressão dinâmica quando na verdade é uma energia cinética. O termo P é a pressão estática. Isto nos ajuda a entender mais abaixo o motivo de aparecer no tensor de energia-momento de um fluido ideal um termo em energia cinética somado a um termo de pressão estática.

Qual o significado de cada termo do tensor $T^{\alpha\beta}$? A ilustração abaixo que me foi gentilmente cedida por meu amigo H. Hinrichsen, tenta basicamente explicar o que significa cada elemento da expressão acima. Isto vai ser discutido mais detalhadamente no próximo capítulo. Basicamente os termos do tensor representam o transporte de energia e o transporte de momentum, que no caso de um gás se manifesta na forma de uma pressão, motivo pelo qual aparece a pressão P nas equações acima. Foi este tensor que Alexander Friedmann usou como fonte de massa e energia nas equações de Einstein e chegou assim à primeira solução de um universo em expansão. Veremos isto nas próximas aulas. Mas antes discutamos um pouco mais o tensor energia-momento.

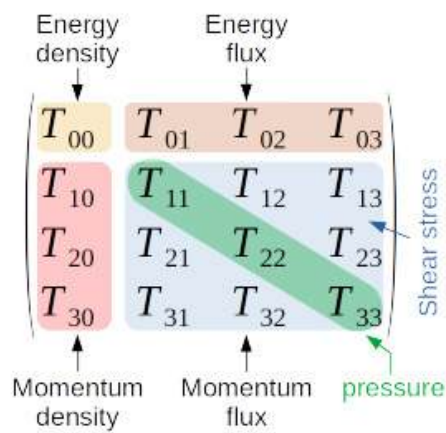


Figura 7.2: O que cada componente do tensor $T^{\alpha\beta}$ representa.

Na Relatividade Geral o fluido ideal é o modelo mais simples para uma distribuição de massa como fonte de campos gravitacionais. O movimento de um fluido ideal é determinado pelas equações de Euler e a equação da continuidade. As grandezas que caracterizam o fluido ideal são definidas de tal maneira que estas equações possam ser escritas em forma covariante e definimos o conceito de tensor de energia-momento.

8

Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento de um fluido ideal

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P \quad (8.1)$$

é o modelo mais simples na Relatividade Geral para a fonte do campo gravitacional. Ela nos permite considerar diferentes termos que contribuem para o campo e suas respectivas ordens de grandeza.

8.1 Leis de Conservação

A equação por nós obtida para o tensor energia-momento é

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(Equação da continuidade} \\ \text{para energia e momento)} \end{array} \quad (8.2)$$

que, na presença de forças externas, é modificada para

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha \quad (8.3)$$

Vamos tratar do caso de um sistema fechado, onde não haja portanto forças externas. Imaginemos também que o sistema tenha um volume V limitado. Escrevendo-a como

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_0 T^{\alpha 0} + \partial_i T^{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial(ct)} T^{\alpha 0} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i} \quad (8.4)$$

e integrando no volume temos

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = - \int_V d^3r \partial_i T^{\alpha i}. \quad (8.5)$$

Podemos agora a lei de Gauss-Ostrogradsky que relaciona a integral de volume com a integral de superfície e escrever

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = - \int_{S(V)} dS_i T^{\alpha i}. \quad (8.6)$$

Esta última integral é nula pois o sistema está contido no volume V e não pode haver qualquer fluxo para fora do mesmo. Disto segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} \right) = 0 \longrightarrow \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = P^\alpha = \text{const.} \quad (8.7)$$

Esta é a lei de conservação de momento e energia num dado volume V do espaço. A grandeza P^α tem dimensão de momento ($kg\ m\ s^{-1}$) e é uma grandeza vetorial Lorentziana. Ela representa o quadrimomento conservado do campo descrito por $T^{\alpha\beta}$. Disto podemos concluir que cP^0 representa a energia e P^i o momento do campo. Portanto as componentes do tensor $T^{\alpha\beta}$ podem ser interpretadas segundo

$$T^{00} = \text{densidade de energia} \quad \frac{T^{0i}}{c} = \text{densidade de momento} \quad (8.8)$$

pois é através da integração destes elementos no volume que obtemos a energia e momento.

No caso de interações mais gerais, como por exemplo num gás ionizado sujeito à interações eletromagnéticas, o tensor energia-momento se torna

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} \quad (8.9)$$

onde $T_{em}^{\alpha\beta}$ é nosso conhecido tensor energia-momento da teoria eletromagnética

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_\gamma^\alpha F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right) \quad (8.10)$$

com

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

De modo geral todas as possíveis formas de energia entram no tensor energia momento

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots \quad (8.12)$$

contribuindo assim para o campo gravitacional. Porém, como discutiremos a seguir, na maioria das aplicações podemos estimar a ordem de grandeza das diferentes contribuições e eventualmente desprezarmos algumas delas.

8.2 As fontes do campo gravitacional e aplicações

Como dissemos no início do capítulo anterior, dado que massa e energia geram campos gravitacionais, foi necessário acharmos uma grandeza que pudesse ser colocada nas equações de Einstein e representassem realmente as fontes de campo. Na Teoria de Gravitação de Newton,

a única fonte de campo é a densidade de massa ρ . Porém, devido ao equivalente relativístico entre massa e energia, na Relatividade toda forma de energia gera campo gravitacional. Isso obviamente torna a Teoria de Einstein muito mais complexa pois um campo gravitacional que transporta energia afeta o espaço a seu redor, ou seja, interage consigo próprio. Obviamente temos ainda que deduzir as equações de campo de Einstein, mas podemos aqui discutir alguns resultados gerais daquilo que acabamos de expor para tentar assim elucidar um pouco melhor estas idéias.

Embora tenhamos escrito um exemplo de uma forma mais geral pro tensor de energia-momento com o acréscimo do campo eletromagnético na forma (8.10), na maioria das aplicações práticas – e por práticas queremos dizer “que conseguimos calcular” – usaremos o conceito de fluido ideal. Sempre que o meio puder ser descrito por um campo de velocidades \mathbf{v} , uma densidade ρ e uma pressão isotrópica P , podemos aplicar estas idéias. Elas valem também para um gás ou poeira, como já dissemos, e até para um corpo sólido. Alguns exemplos são:

- (i) Um gás atômico ou molecular: Neste caso as velocidades individuais dos átomos/moléculas contribuem para a massa de repouso do elemento de volume, em cujo caso temos

$$M = \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \frac{E_{pot}}{c^2} + \sum_j \frac{\hbar \omega_j}{c^2} + \dots \quad (8.13)$$

onde consideramos também a possibilidade de haver fótons de energia $\hbar \omega_j$ da radiação contida no volume bem como a energia potencial E_{pot} de interação entre as partículas. A velocidade das partículas contribuem para a pressão que o gás exerce e portanto para o tensor energia-momento. A velocidade média das partículas num determinado volume $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_n \rangle$ definem um campo de velocidades local (u^α) = $\gamma(c, \mathbf{v})$. A velocidade média, como sabemos da Mecânica Estatística, é normalmente bem menor que as velocidades térmicas individuais. Por exemplo, a velocidade média das moléculas do ar à temperatura ambiente é da ordem de $|\mathbf{v}_n| \approx 400 \text{ m/s}$ ao passo que o movimento do gás como um todo é da ordem de 1 m/s no caso de uma brisa à 30 m/s no caso de um furacão. A contribuição individual de cada uma das partículas para a densidade de massa relativística é da ordem de $(|\mathbf{v}_n|/c^2) \ll 1$. Já a pressão, considerando $P \approx Nk_B T$ e o fato que pelo teorema de equipartição de energia $k_B T \sim m \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle$, temos o conhecido resultado da Mecânica Estatística que $P \sim \rho \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle \ll \rho c^2$. Portanto, a contribuição do pressão ao tensor energia-momento é da ordem de $(|\mathbf{v}_n|/c^2) \ll 1$. Estes termos são portanto desprezíveis e podemos considerar simplesmente a massa de repouso das partículas, desprezando o efeito de sua velocidade.

- (ii) Um corpo sólido ou um fluido: o termo da pressão, no caso de um sólido ou fluido, é sempre $P \ll \rho c^2$. Isto significa que para estes casos podemos desprezar o termo da pressão em $T^{\alpha\beta}$ mantendo apenas o termo de velocidade, caso o corpo possua uma.
- (iii) Um gás de fótons: a densidade de energia u_{em} de um gás de fótons contribui com um fator de $\rho_{rad} = u_{em}/c^2$ à densidade de massa. A pressão de um gás de fótons vale $P = u_{em}/3$. O gás de fótons que temos em mente não é diretamente relacionado aos campos eletromagnéticos presentes, gerados por cargas, mas uma radiação de fundo que surge de transições entre níveis de energia de camadas eletrônicas de partículas ou a radiação de fundo cósmica devido ao Big Bang.

Nos casos (i) e (ii) acima, quando as velocidades não são relativísticas, a massa de repouso da matéria é muitas ordens de grandeza maior que a contribuição cinética:

$$T^{00} \approx \rho c^2, \quad \frac{T^{0i}}{T^{00}} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1, \quad \frac{T^{ij}}{T^{00}} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2, P/\rho c^2\right) \ll 1 \quad (8.14)$$

Isto significa que em muitas das aplicações podemos usar o limite não relativístico

$$(T^{\alpha\beta}) \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Entre as aplicações temos:

1. Terra: se a densidade de massa da Terra for $\rho(\mathbf{r})$ e considerando $\mathbf{v} = 0$, a equação de Euler se reduz à

$$\nabla P = \rho \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (8.16)$$

onde \mathbf{g} é o campo gravitacional local. Isto significa que em termos de ordem de grandeza temos $P \sim \rho g R_T = \rho c^2 (g R_T / c^2) \lesssim 10^{-9} \rho c^2$ onde usamos na estimativa o raio da Terra $R_T \approx 6400 \text{ km}$, a aceleração da gravidade $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Como $P \ll \rho c^2$, a contribuição da pressão em $T^{\alpha\beta}$ pode ser desprezada. Há porém um efeito importante devido à rotação da Terra, o que leva a $v^i \neq 0$ e portanto os termos em u^α entram no tensor de energia-momento. Pelo fato que estes termos são da ordem $v^i \ll c$, eles são normalmente desprezados. Se considerada, a velocidade de rotação leva ao conhecido efeito de Thirring-Lense, que discutiremos futuramente.

2. Sol: para o Sol também vale $P \ll \rho c^2$ e $v \ll c$. Esta aproximação pode ser também aplicada a outros tipos de estrelas, por exemplo anãs brancas.

3. O Universo: a massa das estrelas e galáxias pode ser descrita por uma distribuição contínua de massa quando feita uma média sobre uma região relativamente grande do espaço, da ordem de 10^8 anos-luz. Nas condições atuais do Universo a aproximação acima se aplica, ao passo que em seus estágios primordiais tínhamos a situação de um gás relativístico. A radiação cósmica de fundo ¹ contribui com um fator $\rho_{rad} = u_{em} / c^2$ para a densidade de massa.

¹ Em linguagem técnica conhecida normalmente como *Cosmic Microwave Background* (CMB) ou *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR).

9

Equações de Campo de Einstein

As Equações de Campo de Einstein ou simplesmente Equações de Einstein (EE) são as equações que conectam a métrica $g_{\mu\nu}$ ao tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Elas formam um conjunto de 10 EDP's de 2ª ordem para $g^{\mu\nu}$. Essas equações podem ser deduzidas de maneira heurística, partindo de algumas hipóteses fisicamente plausíveis e simples. Os $g_{\mu\nu}$ entram na equação na forma do tensor de curvatura de Ricci. O espaço de Minkowski é uma solução especial da EE para a situação física implausível – rigorosamente falando – na qual o tensor energia-momento é nulo.

9.1 *A teoria e suas duas faces*

Há duas faces da teoria da gravitação de Einstein. Do ponto de vista prático, ela é uma teoria que nos diz como a massa e a energia curvam ou espaço. Em outras palavras, ela nos diz que podemos substituir aquilo que chamamos de gravidade pela curvatura do espaço. Por outro lado ela é, como o nome diz, uma generalização do princípio da relatividade para referenciais acelerados e neste sentido ela se ocupa em estudar as leis da Física não gravíticas em espaços curvos. Para isto ela recorre ao Princípio da Covariância, que diz que as equações da Física tem que ser escritas de forma a valerem em quaisquer referenciais, sejam eles inerciais ou não. A aplicação do Princípio da Covariância se faz pela regra de transformação segundo a qual substituímos derivadas absolutas por derivadas covariantes.

Assim, quando falamos em TRG podemos estar nos referindo a dois aspectos desta teoria:

- (i) entender como a massa e energia, na forma do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, determinam a curvatura do espaço. Isto quem nos diz são as EE, cujas soluções, baseadas em argumentos físicos de simetria, representam diferentes tipos possíveis de espaço-tempo.
- (ii) entender como as leis da Física – e com isto estamos nos referindo à *todas* as leis da Física – se comportam num espaço curvo. Isto quem

nos dá é o Princípio da Covariância.

A grande maioria dos textos sobre TRG tratam quase de exclusivamente do primeiro aspecto da teoria, ou seja, da TRG enquanto teoria de gravitação. Podemos de certa maneira encarar estas faces de Janus da TRG como independentes, uma vez que a primeira diz respeito a como a métrica é determinada pela presença de massa e energia e a segunda como definir as leis da natureza dada uma métrica subjacente. Estes dois problemas obviamente não são totalmente independentes pois toda forma de energia contribui para o campo gravitacional de tal maneira que, por exemplo, ao estudar as leis de Maxwell em espaços curvos, a energia dos campos eletromagnéticos contribuem para a curvatura. No entanto, em muitas situações de interesse esse acoplamento é desprezível e podemos, dado um $T^{\mu\nu}$, determinar $g^{\mu\nu}$ e, uma vez conhecidos estes, estudar alguns fenômenos físicos sem nos preocuparmos com a perturbação que estes fenômenos possam causar na métrica. É justamente este acoplamento entre a energia de um campo sua influência sobre a métrica que faz com que – diferente de outras teorias físicas fundamentais – o campo interaja com a métrica que ele próprio causa. Isto se reflete na não-linearidade das EE.

Nosso objetivo aqui será o de estabelecer as equações que dão conta do problema (i) descrito acima, ou seja deduziremos as famosas Equações de Einstein que formam o cerne da TRG. A exemplo da famosa 2ª Lei de Newton $F = ma$, as equações de Einstein são deduzidas a partir de argumentações físicas e das propriedades matemáticas sobre as grandezas que a física impõe. Estas considerações são as seguintes:

1. O campo gravitacional deve ser descrito completamente pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}$ do espaço-tempo quadridimensional. Em outras palavras, toda a gravidade está codificada nos $g^{\mu\nu}$ que podem ser assim vistos como potenciais gravitacionais.
2. As equações de campo devem ser equações tensoriais, ou seja devem ser escritas em forma covariante de modo a não dependerem explicitamente da escolha do sistemas de coordenadas.
3. As equações de campo devem ser equações diferenciais parciais de no máximo 2ª ordem, isto é deve ser linear nas derivadas segundas e conter o produto de no máximo duas derivadas primeiras. Como as leis fundamentais da Física são em grande parte equações diferenciais de segunda ordem, esperamos que as EE também o sejam.
4. No limite não relativístico as EE devem reduzir-se à famosa equação de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho(\mathbf{r})$ para o potencial gravitacional Φ Newtoniano, onde $G = 6.67408 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ é a constante gravitacional e $\rho(\mathbf{r})$ a densidade de massa da fonte.

5. Na gravitação Newtoniana a densidade de massa é a fonte do campo. Devemos na teoria de Einstein considerar que a energia também gera campos.
6. Na ausência de matéria (e baixas energias) devemos recuperar o espaço-tempo de Minkowski.

Dadas as condições acima, em particular as condições 1. e 3., podemos escrever como primeira tentativa, a equação da forma

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (9.1)$$

onde o tensor $G^{\mu\nu}$ – que contém as derivadas dos $g^{\mu\nu}$ e é comumente chamado de **Tensor de Einstein** – deve satisfazer de antemão algumas propriedades. Estas propriedades vêm do fato que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 && \text{conservação de energia e momento} \\ T^{\mu\nu} &= T^{\nu\mu} && \text{simetria} \end{aligned}$$

o que implica, pela igualdade (9.1) em:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} G^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \\ G^{\mu\nu} &= G^{\nu\mu} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Também se $T^{\mu\nu} = 0$, obrigatoriamente $G^{\mu\nu} = 0$ e o espaço é plano. Obviamente a dificuldade do problema consiste em determinar exatamente quem é $G^{\mu\nu}$ que, como já pudemos enfatizar anteriormente, custou anos de árduo trabalho a Einstein.

9.2 A Física

Como pudemos ver no capítulo 3 onde discutimos o limite Newtoniano da métrica – usando como analogia a métrica obtida para um referencial não inercial que gira com velocidade constante – chegamos ao valor

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (9.3)$$

de onde tiramos

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (9.4)$$

A gravitação de Newton corresponde ao limite de campos fracos e velocidades $v \ll c$. Olhando para o tensor energia-momento no caso não relativístico, argumentamos no capítulo anterior que

$$T^{00} \approx \rho c^2 \quad \frac{T^{0i}}{\rho c^2} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1 \quad \frac{T^{ij}}{\rho c^2} = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (9.5)$$

o que significa que podemos escrever a equação de Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ em termos de g_{00} e T_{00} como

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_{00} &= \nabla^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \\ &= \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi \\ &= \frac{2}{c^2} (4\pi G \rho) \\ &= \frac{2}{c^2} \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2) \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}\end{aligned}\quad (9.6)$$

onde usamos o fato que $|g_{00} - 1| \ll 1$ e portanto $T_{00} \approx T^{00}$ ¹. Este resultado nos leva a pensar numa primeira forma para a equação de Einstein, generalizada para 4 dimensões. Isto significa passarmos do Laplaciano $\nabla^2 g_{00}$ para o D'Alembertiano $\square g_{\mu\nu}$:

$$\square g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (9.7)$$

Esta equação parece satisfazer nossas expectativas mas há nela um problema fundamental: *toda forma de energia contribui para a métrica, inclusive a energia dos campos gravitacionais*. Isto significa que na equação acima deveríamos considerar a contribuição extra

$$\square g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{grav}) \quad (9.8)$$

onde $t_{\mu\nu}^{grav}$ representa a contribuição da energia do campo gravitacional ao tensor energia-momento. Porém não sabemos como especificar esta grandeza pois ela só pode ser determinada uma vez conhecido os $g_{\mu\nu}$! Isto significa que não podemos adicioná-lo simplesmente à equação pois não conhecemos sua dependência funcional em $g_{\mu\nu}$. A saída deste problema é retomar a equação

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (9.9)$$

em sua forma original, com as condições

$$\begin{aligned}\nabla_\mu G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu};\mu = 0 \\ G_{\mu\nu} &= G_{\nu\mu}\end{aligned}\quad (9.10)$$

e buscar construir um tensor $G_{\mu\nu}$ de ordem 2 diretamente a partir do tensor de curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ que satisfaça as condições impostas. Satisfazer as condições não torna a teoria fisicamente válida: sua validade deve ser verificada posteriormente comparando suas predições com os resultados observacionais.

¹ Vale a pena lembrar neste ponto que não vale simplesmente a igualdade $T_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$ pois a regra de transformação entre a representação covariante e contravariante de um tensor é $T_{ik} = g_{ip} g_{kr} T^{pr}$.

9.3 Dedução das Equações de Einstein

Retomamos a definição do tensor de curvatura na forma

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}. \quad (9.11)$$

E procuremos a partir dele construir um tensor de 2ª ordem ². O tensor que temos é o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \quad (9.12)$$

que tem a propriedade $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Porém

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu ;\mu} \neq 0. \quad (9.13)$$

Portanto, o $G_{\nu\mu}$ que procuramos não pode ser igual à $R_{\mu\nu}$ pois este não tem as propriedades corretas. Porém o escalar de curvatura $R = R^{\mu}_{\mu}$ também é simétrico, posto que escalar, bem como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Quanto ao primeiro, não podemos simplesmente igualar um tensor a um escalar. Com relação ao segundo, embora $g_{\mu\nu ;\mu} = 0$ também descartamos $G_{\nu\mu} = g_{\nu\mu}$ pois se assim fosse estaríamos simplesmente igualando $g_{\mu\nu}$ à $T_{\mu\nu}$ e não obteríamos o limite Newtoniano. Uma possível forma para um tensor simétrico de 2ª ordem obtido a partir do tensor de Riemman é uma combinação de todos estas três grandezas na forma

$$G_{\mu\nu} = a R_{\mu\nu} + b R g_{\mu\nu}. \quad (9.14)$$

No que tange à simetria por troca de índices, a condição é automaticamente satisfeita pela expressão acima uma vez que tanto $g_{\mu\nu}$ quanto $R_{\mu\nu}$ são simétricos. Resta-nos determinar quais condições se aplicam aos coeficientes a e b para que $G_{\mu\nu ;\mu} = 0$. Mas $G_{\mu\nu ;\mu} = 0$ implica em $R_{\mu\nu ;\mu}$. Isto pode ser feito usando as conhecidas *identidades de Bianchi*.

9.3.1 As identidades de Bianchi

Geralmente pensamos na métrica como sendo dada e a partir dela determinamos o tensor de curvatura de Riemman usando a definição (9.11). Uma pergunta que podemos fazer é se dado um tensor de curvatura $R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$, com as devidas propriedades de simetria, se seria possível determinar a métrica a partir dele. Isto é possível em alguns casos com o uso das conhecidas *identidades de Bianchi*

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\nu ;\lambda} + R^{\rho}_{\mu\nu\lambda ;\sigma} + R^{\rho}_{\mu\lambda\sigma ;\nu} = 0 \quad (9.15)$$

ou

$$R_{\rho\mu\sigma\nu ;\lambda} + R_{\rho\nu\lambda\sigma ;\mu} + R_{\rho\lambda\sigma\nu ;\mu} = 0 \quad (9.16)$$

² Alguns textos como o de Weinberg preferem trabalhar com o tensor de curvatura na forma $R_{\kappa\mu\rho\nu}$ pois é mais fácil visualizar suas propriedades de simetria. Lembramos que a relação entre os dois é $R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} = g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\mu\rho\nu}$.

ou, usando a propriedade de antissimetria por troca da ordem dos pares de índices, escrever estas mesmas expressões como

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\nu;\lambda} - R^{\rho}_{\mu\lambda\nu;\sigma} - R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda;\nu} = 0 \quad (9.17)$$

$$R_{\rho\mu\sigma\nu;\lambda} - R_{\rho\mu\lambda\nu;\sigma} - R_{\rho\mu\sigma\lambda;\nu} = 0. \quad (9.18)$$

Estas identidades representam um conjunto de 20 equações diferenciais (em 4 dimensões). Para determinar $R_{\mu\nu;\mu}$ precisamos achar as expressões equivalentes para o tensor de Ricci. Isto pode ser feito diretamente sobre as identidades de Bianchi contraindo os índices ρ e σ , isto é

$$g^{\rho\sigma} (R_{\rho\mu\sigma\nu;\lambda} - R_{\rho\mu\lambda\nu;\sigma} - R_{\rho\mu\sigma\lambda;\nu}) = 0. \quad (9.19)$$

Isto nos leva à

$$\begin{aligned} \underbrace{R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu;\lambda}}_{=R_{\mu\nu;\lambda}} - R^{\sigma}_{\mu\lambda\nu;\sigma} - \underbrace{R^{\sigma}_{\mu\sigma\lambda;\nu}}_{=R_{\mu\lambda;\nu}} &= 0 \\ R_{\mu\nu;\lambda} - R^{\sigma}_{\mu\lambda\nu;\sigma} - R_{\mu\lambda;\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (9.20)$$

Contraindo novamente μ com ν ficamos com

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu;\lambda} - R^{\sigma}_{\mu\lambda\nu;\sigma} - R_{\mu\lambda;\nu}) &= 0 \\ \underbrace{R^{\mu}_{\mu;\lambda}}_{=R_{;\lambda}} - R^{\sigma\nu}_{\lambda\nu;\sigma} - R^{\nu}_{\lambda;\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Lembramos agora que

$$R^{\sigma\nu}_{\lambda\nu;\sigma} = R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} \quad (9.22)$$

e portanto ficamos com

$$R_{;\lambda} - R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} - R^{\nu}_{\lambda;\nu} = 0. \quad (9.23)$$

Como os índices σ e ν são mudos, podemos fazer $\sigma = \nu$ e obter

$$R_{;\lambda} - 2 R^{\nu}_{\lambda;\nu} = 0 \quad (9.24)$$

A conclusão deste resultado é que o divergente do tensor de Ricci não é igual a zero. Ele é igual à derivada covariante da curvatura escalar R e só é nulo se a curvatura escalar for uma constante. Isto significa que a tentativa de Einstein de achar um tensor de ordem 2 e divergente nulo mostrou que o tensor de Ricci não é este tensor. Podemos escrever esta expressão também como

$$R_{\mu\nu;\nu} = \frac{R_{;\nu}}{2} \quad (9.25)$$

Voltando agora à equação (9.14) e à condição $G_{\mu\nu;\nu}$ obtemos

$$G_{\mu\nu;\nu} = a R_{\mu\nu;\nu} + b g_{\mu\nu;\nu} R + b g_{\mu\nu} R_{;\nu} = \left(\frac{a}{2} + b\right) R_{;\nu} = 0 \quad (9.26)$$

pois $g_{\mu\nu ;\nu} = 0$. Para que esta expressão seja satisfeita temos que ou $a = -2b$ ou $R_{;\nu} = 0$. Se quisermos uma expressão que seja verdadeira para diferentes distribuições de massa e energia, a condição $R_{;\nu} = 0$ é muito restritiva e portanto só nos sobra a condição $a = -2b$. Com isto somos levados à

$$G_{\mu\nu} = a \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (9.27)$$

Esta é a forma geral do G que procuramos. Para determinar a constante a , devemos recorrer à física, mais precisamente ao limite Newtoniano das Equações de Einstein. Uma forma alternativa para deduzir esta expressão para $G_{\mu\nu}$ é apresentada abaixo.

A expressão (9.24) para a divergência do tensor de Ricci significa que ele não é um tensor de divergência zero e portanto não serve diretamente como candidato a $G_{\mu\nu}$. Podemos porém fazer um truque e escrever o termo $R_{;\nu}$ como divergente de um tensor de ordem 2. Para isto podemos multiplicá-lo pelo tensor constante de ordem 2, o símbolo de Kronecker, e calcular seu divergente:

$$(\delta^\nu_\gamma R)_{;\nu} = (\delta^\nu_\gamma)_{;\nu} R + \delta^\nu_\gamma R_{;\nu} = 0 + R_{;\nu} = R_{;\nu} \quad (9.28)$$

Substituindo esta expressão na equação (9.24) temos

$$(\delta^\nu_\gamma R)_{;\nu} - 2 R^\nu_{\lambda ;\nu} = \left(\delta^\nu_\gamma R - 2 R^\nu_{\lambda} \right)_{;\nu} = 0 \quad (9.29)$$

Multiplicando esta expressão por $-\frac{1}{2}$ obtemos

$$\left(R^\nu_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^\nu_\gamma R \right)_{;\nu} = 0 \quad (9.30)$$

Com isto encontramos um tensor de ordem 2, simétrico e cujo divergente é nulo

$$\begin{aligned} E^\nu_{\lambda} &= R^\nu_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^\nu_\gamma R \\ E^\nu_{\lambda ;\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

Este tensor é conhecido como *tensor de curvatura de Einstein*. Com este resultado, obtido no outono de 1915, Einstein pode finalmente escrever suas equações na forma ($\lambda \leftrightarrow \mu$)

$$R^\nu_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^\nu_{\mu} R = \kappa T^\nu_{\mu} \quad (9.32)$$

Esta equação pode ser facilmente transformada na forma conhecida baixando o índice ν e renomeando os índices:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (9.33)$$

A constante κ é obtida fazendo as considerações do limite Newtoniano na próxima seção.

9.4 O limite Newtoniano e a determinação de a

Vamos tentar achar o valor da constante a impondo a condição que para campos fracos, quando a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser aproximada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (9.34)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e também a condição de velocidades não relativísticas, ou seja

$$|T_{\mu\nu}| \ll T_{00} \xrightarrow{(9.10)} |G_{\mu\nu}| \ll G_{00} \quad (9.35)$$

Calculemos primeiro o traço de $G_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = \begin{cases} = a(R - 2R) = -aR & \text{(Eq. 9.27)} \\ \approx g^{00} G_{00} \approx a(R_{00} - R/2) & \text{(Eq. 9.35)} \end{cases} \quad (9.36)$$

As duas expressões são coerentes se $R = -2R_{00}$ e com isto

$$G_{00} \approx a(R_{00} - R/2) = 2aR_{00} \quad (9.37)$$

Se $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, então na definição (9.11) os termos quadráticos em Γ são desprezíveis e ficamos com

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (9.38)$$

Para campos fracos e estacionários

$$R_{00} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{0\rho}}{\partial x^0}}_{=0} - \frac{\partial \Gamma^i_{00}}{\partial x^i} \quad \text{onde} \quad \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \quad (9.39)$$

Disto segue que

$$G_{00} = -2a \Gamma^i_{00} = -a \nabla^2 g_{00}. \quad (9.40)$$

Porém a condição que a equação de Einstein recaia sobre a Equação de Poisson para o campo gravitacional Newtoniano impunha que

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00} \quad (9.41)$$

Para que estas duas equações sejam coerentes temos que $a = -1$ e portanto chegamos finalmente às [Equações de Campo de Einstein](#) ou simplesmente [Equações de Einstein](#):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (9.42)$$

É possível escrever esta equação de outra forma. Antes lembremo-nos das definições

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\nu\mu} &= R^\mu{}_\mu = R \\ g^{\mu\nu} T_{\nu\mu} &= T^\mu{}_\mu = T \\ g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= \delta^\mu{}_\mu = 4. \end{aligned} \quad (9.43)$$

R e T representam o traço dos respectivos tensores e $\delta^\mu{}_\mu$ é o traço da matriz identidade $tr(\mathbb{1})$. Multiplicando então os termos da equação por $g^{\mu\nu}$, ou seja, fazendo a contração dos índices temos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) &= g^{\mu\nu} \left(-\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right), \\ R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} R \delta^\mu{}_\mu &= -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\mu \\ R - \frac{1}{2} R \times 4 &= -\frac{8\pi G}{c^4} T, \\ -R &= -\frac{8\pi G}{c^4} T. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Portanto podemos substituir o R na equação de Einstein por $(8\pi G/c^4) T$ escrevendo-a como

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (9.45)$$

9.5 A constante cosmológica Λ

Podemos modificar as Equações de Einstein introduzindo um termo *linear* em $g_{\mu\nu}$, ou seja, escrevendo a equação como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (9.46)$$

As 3 primeiras condições impostas à $G_{\mu\nu}$ no início deste capítulo continuam sendo satisfeitas, mas não a condição 4 que diz que as Equações de Einstein devem se reduzir à equação de Poisson do potencial gravitacional Newtoniano, i.e. $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\mathbf{r})$. Esta equação não se reduz ao caso Newtoniano para campos fracos e estacionários.

Porém sabemos que para nosso planeta e o sistema solar, a teoria de Newton funciona muito bem e se quisermos que a equação com Λ seja válida neste limite, temos que importa que o termo adicional seja muito pequeno. Se olharmos para as Equações de Einstein, podemos observar que os $R_{\mu\nu}$ têm dimensão de $1/\text{comprimento}^2$, pois os $g_{\mu\nu}$ são

adimensionais mas suas derivadas segundas em x^α tem esta dimensão. Portanto Λ tem que ter dimensão de $(\text{comprimento})^{-2}$ e a condição Λ pequeno implica que o comprimento $1/\sqrt{\Lambda}$ deve ser muito grande, por exemplo

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} > 10^5 \text{ anos-luz} \quad (9.47)$$

ou seja, da ordem do tamanho de nossa galáxia. É por este motivo que esta constante é conhecida como *constante cosmológica* pois só deve ter um papel em escalas de comprimento muito grandes. Os modelos cosmológicos de hoje partem de uma valor $\approx 1/\sqrt{\Lambda} > 10^{10}$ anos-luz.

Campos gravitacionais estáticos: a métrica de Schwarzschild

Estudaremos neste capítulo a forma geral dos campos gravitacionais com simetria esférica (isotrópicos) e estacionários. Em particular discutiremos a solução de Schwarzschild para a métrica $g_{\mu\nu}$ fora da distribuição de massa. A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata das Equações de Campo de Einstein e permitiu a comprovação experimental de muitas previsões da Teoria da Relatividade Geral.

10.1 A métrica estática e isotrópica

Toda teoria física nova, pois mais bela e atraente que nos possa parecer, permanece apenas um belo exercício de nossa imaginação enquanto suas previsões não forem corroboradas por dados experimentais. Isto obviamente não significa que não devamos exercitar nossa imaginação pois estudo teórico aprofundado de teorias vigentes ou novas pode futuramente se tornar relevante ou indicar caminhos a serem melhor explorados. Os números imaginários são um belo exemplo disso. Ao propor sua teoria, Einstein sugeriu três testes da RG, a saber ¹:

- i. O desvio para o vermelho das linhas espectrais devido à gravidade;
- ii. a deflexão da luz pelo Sol;
- iii. a precessão do periélio das órbitas dos planetas interiores.

O primeiro problema, por nós discutido na seção (3.4), é resultado da dilatação temporal devido à dependência da métrica em r^{-2} . Ele era chamado antigamente de *desvio de Einstein*, para diferenciá-lo do efeito Doppler relativístico usual e é justamente neste ponto que reside a dificuldade em medir o fenômeno pois ele geralmente é mascarado pelo efeito Doppler devido ao movimento da fonte. Apesar de várias tentativas anteriores, o experimento tido como comprovação empírica

¹ S. Weinberg, *op. cit.*, p. 175.

² O fenômeno pode ser também interpretado pelo princípio da equivalência, pois sendo um referencial acelerado equivalente a um campo gravitacional, o desvio é resultado do efeito Doppler. Ele também pode ser interpretado através da famosa equação $E = mc^2$ aplicada a fótons, onde para o fóton usamos $m = h\nu/c^2$, através da conservação de energia (um fóton que cai ganha energia). Este resultado diz basicamente que o desvio gravitacional na verdade prescinde de qualquer conceito da Relatividade Geral. Para duas interessantes discussões sobre a primeira interpretação, vide: R. B. Scott, *Teaching the gravitational redshift: lessons from the history and philosophy of Physics*, Journal of Physics: Conference Series **600** (2015), 012055; P. S. Florides, *Einstein's Equivalence Principle and the Gravitational Redshift*, Intl. J. Modern Phys. A **17/20** (2002), pp. 2759. Para a explicação da Relatividade Especial vide: R. F. Evans and J. Dunning-Davies, *The Gravitational Redshift*, arXiv:gr-qc/0403082.

do desvio gravitacional é o famoso experimento de Pound e Rebka em 1960³. A deflexão da luz pelo Sol foi comprovada já em 1919 nas famosas observações do eclipse total do Sol em Sobral, no Brasil, e na Ilha Príncipe na costa da África Ocidental. Discutiremos estas observações no capítulo 11 mais detalhadamente. A precessão do periélio também será discutida neste mesmo capítulo em detalhes.

Todos estes experimentos foram realizados na presença de campos que, em boa aproximação, têm simetria esférica, são estáticos e atuam no vácuo. Não devemos nos esquecer que as ECE são equações diferenciais parciais *não lineares* para os campos $g_{\mu\nu}$ e portanto não existe um procedimento padrão para sua resolução. Neste sentido, fazer uso de alguma simetria *a priori* dos campos facilita nossa tarefa. As abordagens para a solução das ECE se resumem basicamente à duas:

1. soluções exatas baseadas em hipóteses que simplificam a forma da métrica, como por exemplo isotropia e independência da métrica no tempo; este tipo de solução faz uso de simetrias impostas *a priori* sobre a forma da métrica.
2. soluções das equações linearizadas, isto é, para campos fracos, onde aproximamos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Estas são as soluções que nos levam à ideia de ondas gravitacionais e serão discutidas em capítulos subsequentes.

A primeira abordagem, que é o conteúdo deste capítulo, foi adotada por Karl Schwarzschild, sendo a sua solução uma das mais importantes em toda a RG. Isto se deve não só ao fato de ser a primeira solução exata conhecida mas também pela sua relevância em aplicações práticas. A solução de Schwarzschild se aplica a uma massa esférica e que não tem rotação. A partir dela podemos deduzir o efeito das chamadas lentes gravitacionais, calcular a precessão do periélio de Mercúrio e deduzir o raio de Schwarzschild, que define o famoso *event horizon* dos buracos negros. Basicamente, o que Schwarzschild procurava era:

- i. uma métrica que não dependesse do tempo;
- ii. uma métrica que tivesse simetria esférica;
- iii. uma métrica que se aplicasse a uma região vazia (vácuo) do espaço-tempo;
- iv. uma métrica que assintoticamente fosse plana.

Um ponto importante a se destacar é o item (iii) acima: a solução de Schwarzschild é também conhecida como *solução do vácuo* pois se aplica para um ponto fora da distribuição de massa e sob a hipótese que neste ponto não haja também qualquer contribuição ao tensor energia-momento. Isto é semelhante à imposição, no Eletromagnetismo, que a

³ R. V. Pound and G. A. Rebka, *Gravitation Red-Shift in Nuclear Resonance*, Phys. Rev. Letters 3 (1959), pp. 439-441; *Apparent weight of photons*, Phys. Rev. Letters 4 (1960), pp. 337-341.

Lei de Gauss para o campo elétrico em um ponto r fora da distribuição de carga valha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (10.1)$$

o que não implica obviamente em $\mathbf{E} = 0$. Da mesma maneira que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10.2)$$

satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, pois

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) = 0, \quad (10.3)$$

o fato de buscarmos uma solução no vácuo para as equações de Einstein não implica que obrigatoriamente nossa solução tenha que ser uma métrica plana.

Antes de tratarmos da solução específica de Schwarzschild e suas consequências, vamos então olhar sob uma perspectiva mais ampla alguns resultados gerais para métricas isotrópicas.

10.2 Forma padrão da métrica isotrópica

Muitas das aplicações de interesse dizem respeito aos campos gravitacionais gerados pela Terra, pelo Sol, ou por outros planetas de nosso sistema solar. Considerando o fato que a deformação destes corpos celestes (seu achatamento) é pequena e suas velocidades de rotação v^i são pequenas comparadas à velocidade da luz c , podemos tomar estes corpos como tendo uma distribuição de massa estacionária e com simetria estacionária, satisfazendo assim os itens (i) e (ii) apresentados logo acima. A solução $g_{\mu\nu}$ que buscamos deve ser independente do tempo e ter a mesma simetria da massa que a gera. Nosso solução vale para regiões fora da massa (iii) e para $r \rightarrow \infty$ o potencial gravitacional tende a zero. Para distâncias grandes o suficiente, devemos recuperar o potencial gravitacional Newtoniano $\Phi = -GM/r$. Isto significa que a métrica assintótica deve ser a de um espaço de Minkowski (item iv.):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (10.4)$$

As variáveis r, θ, ϕ são as coordenadas esféricas e t é a coordenada temporal. Próximo à massa podemos ter coeficientes métricos diferentes da métrica Minkowskiana mas que ainda assim mantém a isotropia da métrica (independência das variáveis angulares) e estacionaridade (independência de t)

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - C(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10.5)$$

Em função da isotropia da métrica as distâncias entre os pontos (t, r, θ, ϕ) e $(t, r, \theta \pm d\theta, \phi)$ não pode depender do sinal de $d\theta$, o mesmo valendo

para $d\phi$. Isto significa que não pode haver termos lineares em $d\theta$ ou $d\phi$. Um termo do tipo $D(r) dr dt$ pode ser eliminado pela introdução de uma nova variável $t \rightarrow t + \psi(r)$. Como podemos introduzir uma nova variável radial, é possível tomar $C(r) = 1$ e escrever a forma padrão da métrica isotrópica

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.6)$$

forma padrão da métrica isotrópica e estática

Muitos livros de Relatividade Geral apresentam esta métrica na forma ⁴

$$ds^2 = e^{\alpha(r)} c^2 dt^2 - e^{\beta(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10.7)$$

Esta forma em termos de funções exponenciais é conveniente na hora de resolver as ECE. K. Schwarzschild por sua vez partiu da forma, também adotada por Weinberg ⁵:

$$ds^2 = F dt^2 - G (dx^2 + dy^2 + dz^2) - H (x dx + y dy + z dz)^2, \quad (10.8)$$

onde F , G e H funções de r . Todas estas diferentes formas são equivalente à forma padrão apresentada acima.

A condição segundo a qual devemos recuperar a métrica de Minkowski se estivemos suficientemente longe da distribuição de massa implica que

$$A(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad B(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad (10.9)$$

É importante notarmos que nos limites para r muito grande, a variável r representa realmente a distância do ponto no espaço ao centro de massa de nosso corpo esférico. Porém, a distância r do centro de massa a um ponto do espaço não tão distante assim é, segundo a métrica

$$\Delta r = \int_{r_1}^{r_2} A^{1/2} dr' \neq r_2 - r_1 \quad \text{se} \quad A \neq 1 \quad (10.10)$$

Isto significa que o subespaço 3-dimensional das coordenadas (r, θ, ϕ) não é plano! Embora todos os pontos sobre uma superfície $r = \text{constante}$ sejam equivalentes, esta superfície não tem as propriedades de uma superfície esférica do espaço euclidiano!

10.3 Métrica, símbolos de Christoffel e tensor de Ricci

Como vamos usar bastante a métrica, os símbolos de Christoffel e o tensor de Ricci para estudarmos a solução de Schwarzschild, façamos

⁴ H. Stephani, *op.cit.* pp. 95-96.

⁵ S. Weinberg, *op.cit.* pp. 175-177 e Capítulo 13, pp. 375 ff.

aqui um breve resumo dos valores que estas grandezas assumem. O tensor métrico tem a forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Os símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (10.13)$$

diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= \frac{B'}{2B} & \Gamma^1_{00} &= \frac{B'}{2A} & \Gamma^1_{11} &= \frac{A'}{2A} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{r} & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{A} & \Gamma^1_{33} &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \\ \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r} & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \cot \theta & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (10.14)$$

onde $B' = dB(r)/dr$ e $A' = dA(r)/dr$. Para o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} \quad (10.15)$$

obtemos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{00}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\sigma}_{0\rho} \Gamma^{\rho}_{\sigma 0} - \Gamma^{\sigma}_{00} \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} \\ &= -\frac{B''}{2A} + \frac{A'B'}{2A^2} + \frac{B'^2}{2AB} - \frac{B'}{A} \left(\frac{2}{r} + \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \right) \\ &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde $B'' = d^2B(r)/dr^2$ e $A'' = d^2A(r)/dr^2$. Além disto temos

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \\ R_{22} &= -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \\ R_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Com estas considerações e as grandezas que acabamos de calcular estamos prontos para estudar a solução de Schwarzschild ⁶.

⁶ As ECE admitem as mais variadas soluções e descrevem desde espaços planos de Minkowski, espaços curvos na presença de massa, o espaço no interior de estrelas até Universo em expansão. Embora haja 10 funções $g_{\mu\nu}$ que compõem o tensor métrico, as soluções das EE nos dão um total de apenas 6 delas. Isto ocorre pois as 4 equações $G_{\mu\nu|v} = 0$ discutidas na dedução das ECE, faz com que tenhamos apenas $10 - 4 = 6$ equações independentes. Isto significa que as soluções das ECE não definem todas as 10 componentes do tensor métrico mas apenas 6 delas. Isto é uma consequência do fato que temos sempre a liberdade de escolher o sistema de coordenadas mais apropriado fazendo a transformação $x^\mu = x'^\mu(x')$.

10.4 Schwarzschild e o sistema solar

Antes de falarmos da solução de Schwarzschild para as Equações de Einstein (EE), é interessante falarmos um pouco de Karl Schwarzschild, o astrônomo e físico alemão cuja solução das Equações de Einstein leva hoje seu nome. Há um detalhe até certo ponto trágico acerca de sua vida: com a eclosão da I Guerra Mundial, Schwarzschild apresentou-se voluntariamente ao exército alemão. Ele foi enviado ao *front* russo e em 1915, entre uma batalha e outra – ele era responsável por cálculos balísticos – descobriu aquela que é a mais simples de todas as soluções e uma das mais importantes. No front ele desenvolveu uma doença auto-imune (pênfigo vulgar) e foi enviado de volta à Alemanha por invalidez, vindo a falecer em 1916. A morte prematura o poupou da perseguição por ser judeu ⁷.

10.5 A solução exterior de Schwarzschild

Partiremos de uma distribuição de massa esférica, estacionária limitada no espaço

$$\rho(r) \begin{cases} \neq 0 & (r \leq r_0) \\ = 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (10.18)$$

A solução das ECE para $r \leq r_0$ é a chamada *solução interior* de Schwarzschild, caso contrário estamos lidando com a *solução exterior* ou *de vácuo*. Em princípio o tensor $T_{\mu\nu}$ pode ser tomado como sendo o da equação (7.30). Sendo a distribuição de massa estática, todos os elementos do tensor proporcionais aos v^i são nulos. O termo correspondente à pressão P pode ser tomado como tendo uma forma igual à da densidade $\rho(r)$, isto é diferente de zero dentro da distribuição e nula fora dela. Porém como $P \ll \rho c^2$ podemos desprezá-lo, retendo apenas o termo de massa caso estejamos dentro da distribuição. Se estivermos fora, $T_{\mu\nu} = 0$, daí o nome de *vácuo*.

Para o vácuo, a equação de Einstein se reduz à

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (10.19)$$

Se tomarmos o traço desta expressão obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) &= 0 \\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{\text{tr}(\mathbf{1})=4} &= 0 \\ R - 2R &= 0 \\ -R &= 0 \end{aligned} \quad (10.20)$$



Figura 10.1: Karl Schwarzschild (1873 – 1916).

⁷ Schwarzschild era de uma afluente família judia ligada ao ramo têxtil em Frankfurt. Seu filho Martin Schwarzschild tornou-se um astrofísico de renome na Universidade de Princeton. Sua filha Agathe Schwarzschild Thornton era professora de letras clássicas na Nova Zelândia.

Sendo $R = 0$ a equação de Einstein se resume à

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (10.21)$$

Como podemos deduzir da forma padrão da seção anterior, esta fórmula é trivialmente satisfeita para $\mu \neq \nu$. Como $R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$ segue que sendo $R_{22} = 0$ a condição $R_{33} = 0$ é satisfeita automaticamente. Ficamos assim com 3 equações

$$R_{00} = 0, \quad R_{11} = 0, \quad R_{22} = 0. \quad (10.22)$$

Isto se traduz nas equações para as funções $A(r)$ e $B(r)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} \\ 0 &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \\ 0 &= 1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (10.23)$$

Uma maneira rápida de resolver esta equação é notar que

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = 0 \quad (10.24)$$

de onde sai que

$$\frac{d}{dr} \ln(AB) = 0 \quad (10.25)$$

Disto deduz-se que

$$A(r)B(r) = \text{constante} \quad (10.26)$$

Como no limite assintótico temos que $A(r \rightarrow \infty) = B(r \rightarrow \infty) = 1$ temos que a constante na expressão acima vale 1 e portanto

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (10.27)$$

Com este resultado podemos então substituir as funções A nas expressões para o tensor de Ricci pela função $1/B$ e reescrever

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0 \quad (10.28)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B}{2rB} = \frac{1}{2rB} \frac{dR_{22}}{dr} = 0 \quad (10.29)$$

A primeira equação faz com que a segunda seja automaticamente satisfeita. Portanto

$$-1 + rB' + B = 0 \longrightarrow rB' + B = 1 \longrightarrow \frac{d(rB)}{dr} = 1 \quad (10.30)$$

Esta última expressão pode ser facilmente integrada, levando à

$$rB = r + \text{constante} \quad (10.31)$$

Vamos chamar esta constante de $-2a$ por uma questão de conveniência. Assim as soluções de Schwarzschild são

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}, \quad A(r) = \frac{1}{1 - 2a/r} \quad (r \geq r_0). \quad (10.32)$$

Com isto podemos escrever o elemento de linha da métrica de Schwarzschild como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Métrica de Schwarzschild

(10.33)

Para determinarmos agora a constante a usamos o limite Newtoniano da gravitação na Relatividade Geral

$$g_{00} = B(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (10.34)$$

Disto segue o famoso *raio de Schwarzschild*

$$r_S = 2a = \frac{2GM}{c^2} \quad (10.35)$$

e, se preferirmos, podemos escrever o elemento de linha para a métrica de Schwarzschild como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

(Métrica de Schwarzschild)

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{Raio de Schwarzschild})$$

(10.36)

A comparação que fizemos entre a teoria Newtoniana como limite da Teoria de Schwarzschild para campos fracos reforça o fato que a métrica de Schwarzschild é a métrica do espaço *exterior* a uma massa M com simetria esférica, razão pela qual a chamamos de *métrica exterior*

de Schwarzschild. Apenas para efeito de registro, escrevamos aqui explicitamente os $g_{\mu\nu}$ de Schwarzschild

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

10.6 A física da solução de Schwarzschild

Para a maioria das aplicações de interesse o raio de Schwarzschild se encontra dentro dos objetos. Isto significa que não precisamos nos preocupar com ele uma vez que se o corpo em questão tem raio r_o , a métrica acima vale para $r > r_o > r_s$. Quando $r_o = r_s$, temos um buraco negro e a matéria colapsa para a singularidade $r = r_o$. Neste caso a métrica exterior se aplica mesmo em $r = r_s$ mas não na forma por nós deduzida. É preciso neste caso remover a singularidade matemática da métrica fazendo uma transformação de coordenadas apropriada. Estas podem ser as coordenadas de Eddington-Finkelstein ou de Kruskal-Szekeres. Estas coordenadas serão discutidas em detalhes no capítulo 16.

	M(kg)	r_s (m)
elétron	9.1×10^{-31}	1.3×10^{-60}
massa de Planck	2×10^{-8}	$1.6 \times 10^{-35} = \ell_P^\dagger$
escala humana	1	1.5×10^{-27}
Terra	5.9×10^{24}	0.007
Júpiter	1.9×10^{27}	1.4
Sol	$m_\odot = 2.0 \times 10^{30}$	3 km
Universo	1.6×10^{55}	$\approx 10^{28}^*$
PSR J0740 + 6620	$\approx 2.14 m_\odot$	6400 ^{**}

Tabela 10.1: Raio de Schwarzschild r_s para objetos de diferentes massas.

[†] ℓ_P é o comprimento de Planck $= \sqrt{\hbar G/c^3}$. O comprimento de Planck é a menor distância para a qual os modelos da física atuais, cujas previsões são experimentalmente corroborados, ainda fazem sentido.

* Horizonte visível do Universo.

** Pulsar descoberto em 2019 com raio aproximado de 15 km.

Este resultado por exemplo mostra por qual motivo podemos usar a gravitação de Newton para nosso sistema solar: se colocarmos a distância da Terra ao Sol $r \approx 148.15 \times 10^6$ km e o raio de Schwarzschild do Sol $r_{S\odot} \approx 3$ km ficamos com

$$\frac{r_{S\odot}}{r} = \frac{3}{148.15} \times 10^{-6} \approx 2 \times 10^{-8} \quad (10.38)$$

ou seja, a razão $r_{S\odot}/r$ é tão pequena que a métrica de Schwarzschild se aproxima da métrica de Minkowski. O raio de Schwarzschild só faz sentido para objetos extremamente densos, como buracos negros ou pulsares. Um exemplo é o Pulsar PSR J0740 + 6620 cujo r_s é aproximadamente 2/5 de seu raio (v. tabela).

10.7 A interpretação física da métrica

A primeira questão que se nos apresenta é: como interpretar fisicamente as coordenadas t, r, θ, ϕ e o que elas tem a ver com a realidade? O primeiro ponto a notar é que na métrica de Schwarzschild as coordenadas θ e ϕ tem a mesma interpretação física que no espaço Euclidiano: elas representam as coordenadas de meridianos e paralelos imaginários no espaço que cerca a distribuição de massa. Por outro lado, r e t são simplesmente coordenadas e não tem o mesmo sentido físico de distância e tempo a eles atribuído na física clássica. O tempo t na métrica é o chamado de *tempo-coordenada*. Tempos coordenadas são os tempos da Relatividade Especial, onde imaginamos que em cada ponto do espaço, em um dado RI, há relógios sincronizados que marcam a passagem do tempo no mesmo ritmo. Quando olhamos para outro RI, este também tem seu tempo coordenada t' com as mesmas características, *i.e.* todos os relógios sincronizados e andando no mesmo ritmo. Porém, a relação entre o tempo coordenada de um referencial e de outro referencial é, como sabemos

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (10.39)$$

onde v é a velocidade relativa entre os dois referenciais inerciais. *O que é importante notar nesta equação é que existe uma dilatação temporal entre tempos medidos em diferentes RI's mas dentro de um mesmo RI, todos os relógios andam em sincronia. Neste sentido existe um único tempo em um dado referencial. Podemos colocar isto de outra forma: na Relatividade Especial o espaço-tempo não é variável: ele é um substrato imutável e não é afetado por quaisquer corpos físicos.* Quando um destes referenciais é um corpo A que se move à velocidade constante (e portanto o corpo representa também um RI), o tempo medido pelo relógio que ele carrega consigo é chamado de tempo-próprio $d\tau$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u_A^2}{c^2}} dt \quad (10.40)$$

onde agora u_A é a velocidade do corpo em relação ao referencial com o tempo-coordenada t . Em resumo, a bem da verdade, todos os tempos medidos na Relatividade Especial são tempos-coordenadas pois valem para todo o espaço de coordenadas de um dado referencial ou de um corpo que se move. Pode parecer um certo preciosismo em definir um “tempo-próprio” pois este nada mais é do que o tempo de um RI ligado a um corpo que se move com velocidade constante. No entanto este preciosismo é importante pois é fundamental distinguirmos a velocidade relativa entre RI's com a velocidade de um corpo que se move e portanto tem diferentes velocidades quando visto de diferentes RI's. Isto nos permite calcular a transformação da velocidade $\mathbf{u} =$

$\mathbf{u}_{||} + \mathbf{u}_{\perp}$ medida em um RI para a velocidade $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{||} + \mathbf{u}'_{\perp}$ medida em outro RI, onde $\mathbf{u}_{||}$ representa a componente da velocidade \mathbf{u} paralela à velocidade relativa \mathbf{v} entre RI's e \mathbf{u}_{\perp} a componente perpendicular à \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{||} &= \frac{\mathbf{u}_{||} - \vec{v}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \\ \mathbf{u}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)} \end{aligned} \tag{10.41}$$

Isto também explica o motivo pelo qual normalmente usamos a letra v para velocidades entre referenciais e u para corpos na TRE, evitando assim confusão.

Quando passamos para a Relatividade Geral, a estória muda completamente. Tempos-coordenadas não podem ser medidos pois são tempos de referenciais onde a métrica é a de Minkowski. Eles entram na expressão de ds^2 mas no caso específico da métrica de Schwarzschild é o termo g_{00} que determina como os relógios andam, isto é, para relógios próximos da distribuição de massa e estáticos, o tempo medido é

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dt. \tag{10.42}$$

que é um tempo-próprio uma vez que medido pelo mesmo relógio sujeito à métrica de Schwarzschild. O intervalo dt seria o intervalo de tempo medido por um/a observador/a infinitamente longe, numa métrica Minkowskiana, ao observar por exemplo a viagem da sonda *Perseverance* entre a Terra e Marte. Este tempo dt é maior que $d\tau$, embora na maioria dos casos, a diferença é mínima uma vez que a métrica no nosso sistema solar é praticamente Minkowskiana. A expressão acima tem caráter mais formal do que prático pois não temos acesso ao tempo-coordenada, isto é, ele não é mensurável. Neste sentido t é um parâmetro nas equações e medidas físicas devem ser expressas em termos de τ , este sim medido por um relógio real sujeito à métrica. A diferença entre tempo-coordenada e “tempo” na Relatividade Geral fica mais clara quando olhamos para a tabela abaixo. O ponto fundamental

Relatividade Especial (Minkowski) v constante	Relatividade Geral (Schwarzschild) r variável
$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$	$d\tau = \sqrt{1 - 2GM/rc^2} dt$

Tabela 10.2: A comparação entre o tempo-coordenada da Relatividade Especial e o tempo-próprio da Relatividade Geral.

nesta comparação é que na TRE v é constante, e portanto faz sentido em falar em um *tempo – coordenada* global. Já na TRG, como no exemplo acima, o tempo depende da posição e é impossível ter relógios em diferentes r que andem em sincronia. Assim, na Relatividade Geral, o tempo sobre o qual faz sentido físico falar é sempre o tempo próprio

pois a medida que o corpo viaja pelo espaço na presença de curvatura, os valores de $d\tau$ mudam. Não existe um tempo *global* no sentido da Relatividade Restrita, onde quem desempenha este papel é o tempo coordenada. No caso em particular da métrica de Schwarzschild o resultado para $d\tau$ implica que relógios próximos da massa andam mais devagar que um relógio que não está sujeito à ação do campo gravitacional, e tanto mais devagar quanto mais próximo nos encontramos da massa, isto é, quanto menor o valor de r . Isto significa, por exemplo, que relógios sobre a superfície do planeta andam mais devagar que relógios a bordo de satélites se menosprezarmos o efeito da velocidade dos mesmos, pois pela Relatividade Restrita relógios que se movem andam mais devagar que relógios parados. O que ocorre na realidade é uma combinação dos dois efeitos. No caso dos satélites do sistema GPS, o resultado final é que os relógios dos satélites andam mais rápido, pois estes se encontram a uma altitude de aproximadamente 20000 km da superfície, o que faz com que se adiantem $45 \mu s$ por dia em relação aos relógios na superfície. Porém, não sendo geoestacionários, há o efeito da dilatação temporal da Relatividade Restrita o que os atrasa em $7 \mu s$ no mesmo intervalo de 1 dia. Isto resulta num efeito total e $38 \mu s$ /dia de adiantamento em relação aos nossos relógios na superfície. Caso não fosse feita a correção relativística nos cálculos de distância, haveria um erro acumulado de 11.4 km em um único dia.

Da mesma maneira r não é a distância radial que separa dois pontos no espaço curvo de Minkowski. Uma distância dR na direção radial, com $d\theta = d\phi = dt = 0$ é dada por

$$dR = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} > dr \quad (10.43)$$

que é portanto sempre maior que a diferença entre as coordenadas radiais. É possível visualizarmos este resultado apelando a um resultado apresentado por Ludwig Flamm⁸ em 1916: quando tentamos entender geometricamente o espaço de Schwarzschild, esbarramos na nossa incapacidade de visualizar uma espaço curvo de $3 + 1$ dimensões. Uma maneira de fazermos isto é fixando duas das coordenadas, por exemplo

- considerando uma fatia do espaço-tempo com $t = \text{constante}$;
- considerando um ângulo fixo, *e.g.* $\theta = \pi/2$.

Estas condições não representam grandes limitações pois sendo a métrica estacionária, uma determinada superfície não muda com o tempo. Pela simetria esférica todos os θ são equivalentes e não ha nada especial se escolhermos, a fim de ilustração, o valor $\theta = \pi/2$. Se fizermos isto,

⁸ Ludwig Flamm (1895–1964) foi um físico austríaco e nas horas vagas um alpinista de talento. Embora tenha tido uma carreira de destaque por conta de seus próprios trabalhos, ele também é conhecido por ter sido genro de Ludwig Boltzmann e ter contribuído para a preservação do espólio deste.

ficamos com uma superfície bidimensional, pois a métrica se reduz à

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (10.44)$$

Para visualizar procedemos como de costume: imaginamos o espaço \mathbb{R}^3 e a superfície acima nela imersa, adicionando uma terceira variável z e representando a métrica acima como a de um espaço em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (10.45)$$

Disto temos que

$$\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \quad (10.46)$$

e portanto ficamos com uma equação diferencial em z

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}} \quad (10.47)$$

cuja solução nos dá a fórmula do **parabolóide de Flamm**:

$$z = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1}} dr = 2\sqrt{(r - r_S)r_S} + \text{constante}. \quad (10.48)$$

Podemos também entender melhor, com o auxílio do parabolóide de Flamm, a questão das distâncias radiais medidas por alguém no espaço de Schwarzschild são maiores que as distâncias radiais num espaço de Minkowski. A figura abaixo ilustra isto: S_0 na figura representa uma porção do espaço plano infinitamente longe da massa. Os círculos C_1 e C_3 representam círculos Euclidianos de raio r ao passo que C_2 e C_4 são círculos de raio $r + dr$. A distância dr é a distância radial entre estes círculos no espaço Euclidiano. Contudo, no espaço de Schwarzschild, esta diferença é dada por dR da equação (10.43) e claramente é maior que dr . Isto significa que se medíssemos o perímetro das circunferências, precisaríamos do mesmo número de réguas-padrão em ambos os espaços. Porém, se medíssemos a distância entre os círculos, precisaríamos de mais réguas-padrão no espaço de Schwarzschild que o necessário para o espaço Euclidiano.

Uma outra coisa a se notar é a singularidade na métrica quando $r = 0$ ou $r \rightarrow r_S$. No primeiro caso $g_{00} \rightarrow -\infty$ e $g_{11} \rightarrow 0$. Esta singularidade não nos interessa pois é a mesma singularidade da mecânica clássica, quando lidamos com potenciais centrais. No caso $r \rightarrow r_S$, temos que $g_{11} \rightarrow -\infty$ e dado que em princípio pode haver valores de r_S fora da distribuição de massa, surge a pergunta sobre o que realmente ocorre

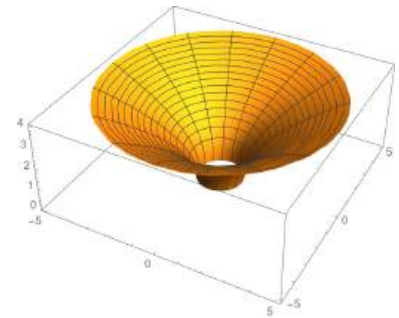


Figura 10.2: O parabolóide de Flamm. Na figura, quando $r = r_S$ (plano $z = 0$) a métrica exterior de Schwarzschild “termina” no sentido que a derivada é infinita e portanto o interior do buraco negro não é acessível e está causalmente desconectado da física para $r > r_S$. Autoria: H. Hinrichsen, com permissão.

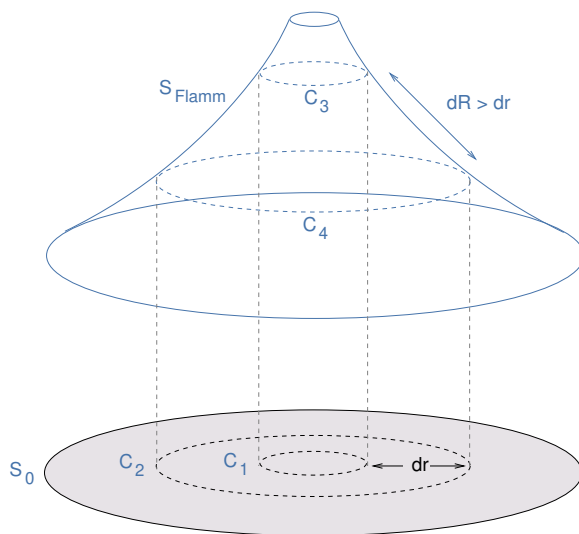


Figura 10.3: Distâncias radiais dr no espaço plano, representado pelo círculo S_0 são menores que distâncias radiais dR medidas no espaço de Schwarzschild, aqui representado em 2 dimensões por um parabolóide de Flamm.

neste ponto. Seria esta singularidade algo real ou um resultado matemático fruto das nossas escolhas de coordenadas? A singularidade da métrica em $r = r_S$ é uma consequência da não-linearidade das equações de Einstein, e acreditou-se durante muito tempo que esta singularidade representaria uma singularidade no espaço-tempo. Porém, há singularidades que são devido à escolha de coordenadas: por exemplo, as coordenadas no Polo Norte do nosso planeta apresentam uma singularidade, embora não haja nada de singular neste ponto, afinal todos os pontos de uma esfera são equivalentes. É a nossa escolha de coordenadas – latitudes e longitudes – que faz com que a longitude não seja definida no Polo Norte ou, se preferirmos, $g^{44} \rightarrow -\infty$ em $\theta = 0$. Este tipo de singularidade devido à escolha de coordenadas é uma chamada *singularidade removível* e por mudança de coordenadas ela desaparece.

Como exemplo de uma singularidade removível, tomemos um elemento de linha da forma

$$ds^2 = \frac{d\zeta^2}{\zeta} + 4\zeta d\varphi^2 \quad (10.49)$$

que tem uma singularidade em $\zeta = 0$. Pela transformação $\zeta = r^2/4$ o elemento de linha se torna

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (10.50)$$

ou seja, recuperamos a métrica plana – sem singularidades, obviamente – em

coordenadas polares.

A singularidade de Schwarzschild em $r = r_S$ é uma singularidade de coordenada apenas, como mostrado por Lemaître ⁹ em 1933. **A singularidade de Schwarzschild não é uma singularidade no espaço-tempo, o que não significa que ela não seja interessante e não tenha consequências físicas.** De acordo com Lemaître é possível remover esta singularidade se introduzirmos um sistema de coordenadas não estático t', r', θ, ϕ :

$$\begin{aligned} dr' &= dt + \sqrt{\frac{r}{r_S}} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr \\ cdt' &= cdt + \sqrt{\frac{r_S}{r}} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr \end{aligned} \quad (10.51)$$

Com um pouco de álgebra, substituindo estes valores na métrica de Schwarzschild chegamos à

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - \frac{r_S}{r} dr'^2 - \left[\frac{3}{2}(r' - ct')\right]^{4/3} r_S^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10.52)$$

Uma discussão mais profunda da transformação de Lemaître e de sua interpretação pode ser encontrada no livro de Landau e Lifshitz, pps. 331 - 332. Outro livro que discute a remoção desta singularidade por uma transformação de Kruskal ¹⁰ é Weinberg, p. 208. Na maioria das situações de interesse, como o tabela (23.1) indica, o raio de Schwarzschild é muito pequeno e não tem efeito algum na física. Na verdade, para astros como o Sol e a Terra o raio de Schwarzschild nem existe, na realidade, pois ele foi por nós calculado para o espaço-tempo exterior à massa e a uma distância de ~ 3 km do centro do Sol ou 7 mm do centro da Terra, as equações por nós resolvida para o vácuo não são válidas.

Estrelas com $r_0 \leq r_S$ (e portanto densidades de massa altíssimas) são chamadas de **buracos negros** pois como veremos brevemente fótons que estejam na sua superfície não conseguem escapar para fora. Para melhor entender os buracos negros teremos que olhar para a *métrica interior* de Schwarzschild.

Um outro ponto físico muito importante é o fato que para a métrica de Schwarzschild $R_{\mu\nu} = 0$ e $R = 0$. A primeira vista isto parece dizer que a métrica é plana, ou seja, um corpo gravitando no entorno ou caindo em direção à massa não veria uma curvatura. Isto se aplica ao espaço quadridimensional, mas quando olhamos o subespaço tridimensional de coordenadas r, θ, ϕ , sem a dimensão temporal, o espaço é curvo!



Figura 10.4: Georges Henri Joseph Édouard Lemaître (1894-1966), físico belga, foi o primeiro a levantar a hipótese da recessão das galáxias ser devido à expansão do Universo. Foi também o proponente da teoria do Big Bang. Lemaître era padre católico.

⁹ G. E. Lemaître, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles, Sér. A*, 53 (1933), 51.

¹⁰ M. D. Kruskal, *Phys. Rev* 119, (1960), 1743.

Movimento num campo central e aplicações

Estudaremos neste capítulo o movimento de uma partícula com ou sem massa sob ação da métrica de Schwarzschild. Estudaremos também algumas aplicações como a atraso do eco do radar, a precessão do periélio de Mercúrio e a desvio dos fótons num campo gravitacional.

Antes de estudarmos as equações de movimento para o problema de dois corpos num potencial central segundo a métrica de Schwarzschild, seria interessante recordarmos o que ocorre na mecânica clássica. Estes resultados Newtonianos nos servem de guia para entender quais modificações os resultados relativísticos trazem consigo.

11.1 As equações de movimento clássicas

Consideremos a Lagrangiana \mathcal{L} de uma massa m na presença de um potencial central $V(r) = -GMm/r$ escrita em coordenadas esféricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - V(r) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] + G \frac{mM}{r}. \quad (11.1)$$

As equações de Euler-Lagrange neste caso nos dão as equações de movimento:=

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= mr\dot{\theta}^2 + mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= mr^2 \sin \theta \cos \theta \ddot{\phi} \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) &= 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

Estas equações são invariantes pela troca $\theta \rightarrow \pi - \theta$, pois nesta caso $\sin \theta \rightarrow \sin \theta$, $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$ e $\dot{\theta} \rightarrow -\dot{\theta}$. Isto significa que se tivermos um problema de valor inicial ($t = 0$) com $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$, ou seja, um movimento que se dá inicialmente no plano equatorial, a uma solução $\{r(t), \theta(t), \phi(t)\}$ qualquer corresponde uma solução $\{r(t), \pi - \theta(t), \phi(t)\}$. Isto contradiz a unicidade da solução para o valor inicial

adotado a menos que $\theta(t) = \pi/2$. Portanto o corpo se mantém no plano equatorial e como qualquer plano é equivalente ao equatorial, podemos assumir simplesmente que $\theta = \pi/2$ e reduzir as equações de movimento à:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{r^2} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

A segunda equação, como sabemos, implica que o momento angular $m\ell = mr^2\dot{\varphi}$ é conservado pois a variável φ é cíclica. A variável ℓ representa o momento angular por unidade de massa. No caso $\ell = 0$ a primeira equação se torna $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$ que corresponde ao caso de um corpo que cai radialmente no potencial gravitacional. Como estamos interessados na precessão do periélio, relacionado à variável φ , é conveniente expressar as relações acima tomando φ como parâmetro usando as relações

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\ell}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (11.4)$$

Isto nos leva à equação

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} = \frac{\ell}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\ell}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right). \quad (11.5)$$

Esta equação fica mais fácil de resolver com a substituição $u = 1/r$, que, após um pouco de álgebra nos dá:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{\ell^2}. \quad (11.6)$$

Esta é a famosa Equação de Binet ¹. A solução desta equação é

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{\ell^2}. \quad (11.7)$$

Com uma translação apropriada de φ podemos escolher $\varphi_0 = 0$ e $A \leq 0$ de modo a ficarmos com uma solução da forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{\ell^2} [1 - e \cos \varphi]; \quad e = -\frac{A\ell^2}{GM}. \quad (11.8)$$

Esta é a equação de uma elipse de excentricidade e .

$$\begin{aligned} E &= K_{cin} + U_{pot} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + U_{efetivo} \begin{cases} < 0 & \text{Elipse,} \\ = 0 & \text{Parábola,} \\ > 0 & \text{Hipérbole.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11.9)$$

$e = 1 \rightarrow$ parábola; $e > 1 \rightarrow$ hipérbole.

¹ Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856) foi um astrônomo francês. A Equação de Binet aqui apresentada é aquela para o problema de Kepler, mas no caso mais geral de um potencial central arbitrário, ela se torna uma equação diferencial de 2ª ordem não linear.

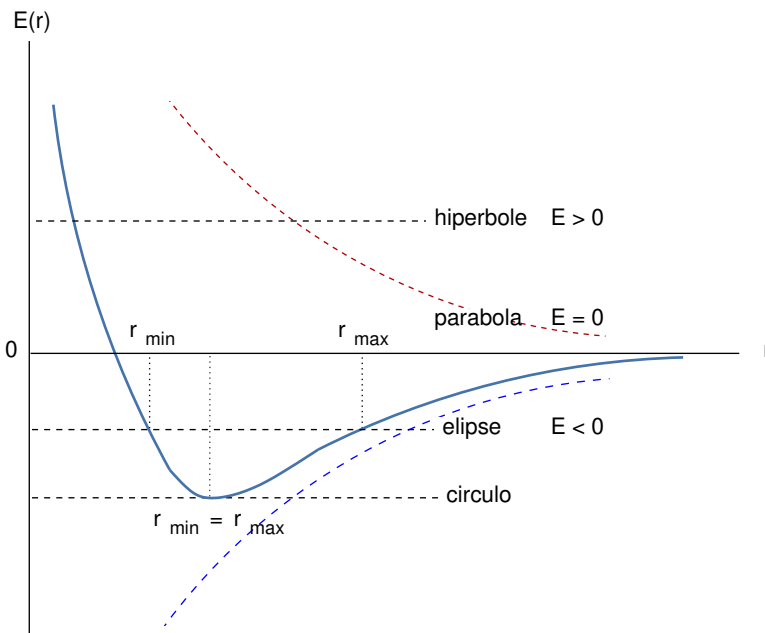


Figura 11.1: O potencial efetivo é uma combinação do potencial gravitacional (curva azul pontilhada) e do “potencial” centrífugo (curva vermelha pontilhada). Para um dado r , dependendo do valor do momento angular (conservado) a energia é tal que o corpo pode descrever uma elipse, oscilando entre r_{min} (periélio) e r_{max} (afélio). Se a energia for tal que ele coincide com o mínimo do poço a elipse degenera-se num círculo. Para $E(r) = 0$ o corpo descreve uma parábola e para valores $E > 0$ temos uma hipérbole.

11.2 As equações de movimento relativísticas: método 1.

Vamos ver agora como obter as equações de movimento no caso de um espaço cuja métrica é a de Schwarzschild. O que estamos chamando aqui de método 1 e 2 (próxima seção) são na verdade o mesmo método, pois o primeiro parte diretamente da Lagrangiana e faz uso das equações de Euler-Lagrange e o segundo parte da equação da geodésica. Porém, a equação da geodésica é justamente a equação de Euler-Lagrange obtida para uma métrica arbitrária. A “diferença” entre os dois métodos portanto é mais uma questão prática do que uma questão conceitual e depende das informações que dispomos acerca do problema que estamos querendo resolver. Alguns livros usam este ou aquele método mas deve ficar claro que se trata do mesmo conceito apenas implementado de formas diferentes.

A trajetória de uma partícula $x^\kappa(\lambda)$ num campo gravitacional é dada, como sabemos, pela equação:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (11.10)$$

onde λ parametriza a curva que descreve a trajetória. Lembremo-nos que esta equação foi por nós obtida a partir da Equação de Euler-

Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (11.11)$$

onde τ é o tempo próprio do corpo de massa m que se move nesta métrica. Isto significa que podemos partir diretamente da métrica para escrever a Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x}^\sigma, x^\sigma) &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} - \frac{\dot{r}^2/2}{1 - \frac{r_S}{r}} - \frac{r^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \end{aligned} \quad (11.12)$$

e chegar rapidamente às equações de movimento nas variáveis $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. Devido à simetria esférica podemos tomar $\theta = \pi/2$, como no caso clássico, reduzindo assim o número de equações para 3. Após um pouco de álgebra chegamos à equação para a coordenada $x^1 = r$, que neste caso vale

$$\frac{\ddot{r}}{1 - \frac{r_S}{r}} + \frac{r_S c^2}{2r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_S}{2r^2} \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2} - r\dot{\phi}^2 = 0. \quad (11.13)$$

A equação para x^0 vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} \right] \right\} &= 0 \\ c \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (11.14)$$

o que finalmente nos dá

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t} = k \quad \longrightarrow \quad d\tau = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt. \quad (11.15)$$

Para ϕ não há qualquer mudança pois a métrica de Schwarzschild é idêntica à de Minkowski no que diz respeito às variáveis angulares. Portanto temos neste caso

$$r^2 \dot{\phi} = \ell. \quad (11.16)$$

As variáveis $x^0 = ct$ e $x^3 = \phi$ são portanto cíclicas. A equação (11.15) nada mais é que a relação entre o tempo-próprio τ e o tempo-coordenada da partícula em questão, obtido no capítulo anterior. Isto mostra também que $k = 1$. A equação (11.16) representa a conservação de momento angular e ℓ é o momento angular por unidade de massa.

A equação em \dot{r} é relativamente complicada, mas se olharmos a definição formal de tempo-próprio na Relatividade Geral

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (11.17)$$

e compararmos com a equação (11.12) obtemos ($\theta = \pi/2$)

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2 \dot{\phi}^2 = c^2 \quad (11.18)$$

que é bem mais simples que a equação (11.13) acima. Podemos trazê-la para uma forma final usando as constantes de integração k e ℓ :

$$\frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{k^2 c^2}{1 - \frac{r_S}{r}} = -c^2 \quad (11.19)$$

Com um pouco de álgebra esta equação também nos leva à lei de conservação de energia ². Também é fácil ver que desta equação obtemos a equação de movimento no espaço de Minkowski pois no limite $r/r_S \rightarrow 0$ os denominadores do 1º e 2º termos do lado esquerdo da equação são iguais a 1 e sendo $k = 1$, os fatores em $-c^2$ cancelam-se mutuamente.

Esta abordagem é evidentemente mais direta e, em muitas circunstâncias, mais simples. Isto ocorre quando conhecemos a forma funcional da métrica $g_{\mu\nu}$ pois neste caso podemos escrever facilmente a Lagrangiana e chegarmos às equações de movimento de maneira idêntica àquela que costumamos usar na Mecânica Clássica não relativística. Ela parece no entanto não ter qualquer relação com o aparato matemático por nós desenvolvido nos capítulos anteriores, em particular à ideia de geodésica. Na próxima seção obteremos assim as equações de movimento a partir da equação da geodésica e mostrar que – como era de se esperar – obtemos o mesmo resultado.

11.3 As equações de movimento relativísticas: método 2.

O método por nós apresentado na seção anterior foi feito para uma partícula de massa m . Poderíamos tê-lo empregado para uma partícula sem massa também. A diferença é que para partículas de massa não nula usamos como parâmetro λ o tempo-próprio, isto é $\lambda = \tau$. No caso de fótons, uma vez que $d\tau = 0$, temos que escolher outro parâmetro de curva λ . Este parâmetro pode ser, como veremos no caso do desvio da luz no campo gravitacional, um ângulo medido em relação a um eixo que aponta numa direção convenientemente escolhida. Vamos aproveitar esta seção e generalizar os resultados para quaisquer tipos de partículas. Tomaremos na equação (11.10) para λ enquanto parâmetro afim e calculemos explicitamente os termos que nela aparecem. Por uma questão de clareza e simplicidade de notação, usaremos as funções $A(r)$ e $B(r)$ da métrica de Schwarzschild e não sua forma explícita por nós conhecida. Usaremos também os símbolos de Christoffel já calculados no capítulo anterior, expressos em termos das funções $A(r)$, $B(r)$ e suas derivadas em r , $A'(r)$ e $B'(r)$ respectivamente. Neste caso

²Foster e Nightingale, p. 137. Esta equação é o análogo à equação que define o módulo da 4-velocidade na TRE. Lembrando a definição de quadrivelocidade $U^\alpha = (\gamma c, \gamma u^x, \gamma u^y, \gamma u^z)$ segue que $U^2 = U^\alpha U_\alpha = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 u^2 = \gamma^2 (c^2 - u^2) = c^2$.

temos:

1. $\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} = -\Gamma^0_{01} \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} - \Gamma^0_{10} \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} = -\frac{B'}{B} \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$
2. $\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{2A} \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{A} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2$
3. $\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2$
4. $\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda}$

De novo, podemos tomar $\theta = \pi/2$, que satisfaz automaticamente a terceira das equações acima, sem comprometermos com isto a generalidade da solução. Num dado instante t_0 podemos girar o sistema de coordenadas de tal maneira que $\theta = \pi/2$ e $d\theta/d\lambda = 0$. Com isto, o vetor posição e velocidade e assim a trajetória ficam restritos ao plano equatorial. Com este valor de θ a 4ª equação diferencial acima para a variável ϕ se torna

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad (11.20)$$

e portanto

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) = \ell = \text{constante} \quad (11.21)$$

ou seja, o momento angular é conservado (quando interpretamos λ como sendo τ). A 1ª das equações acima para a variável x^0 , pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \frac{dx^0}{d\lambda} + \ln B \right) &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left[\ln \left(B \frac{dx^0}{d\lambda} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (11.22)$$

cuja integração leva à

$$B \frac{dx^0}{d\lambda} = K = \text{constante} \quad (11.23)$$

Esta equação para o caso de $\lambda = \tau$ nada mais é que a relação entre tempo-próprio e tempo-coordenada obtida na seção anterior. Isto permite nos mostrar que $K = kc$ (vide eq. 11.15). Porém, vamos manter K na notação. Falta agora achar a 2ª equação, aquela para a variável r . Usando os resultados anteriores com as constantes ℓ e K esta equação se reduz à

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{K^2 B'}{2AB^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{\ell^2}{Ar^3} = 0 \quad (11.24)$$

Multiplicando esta equação por $2A$ podemos escrevê-la na forma

$$\frac{d}{d\lambda} \left[A \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \ell^2 - \frac{K^2}{B} \right] = 0 \quad (11.25)$$

cuja integração leva à

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{K^2}{B} = -\epsilon = \text{constante} \quad (11.26)$$

Esta é a principal equação de movimento a ser resolvida e corresponde à equação (11.19) por nós obtida pelo método 1 da seção anterior. Para verificarmos esta afirmação temos que mostrar qual o valor (ou valores) que ϵ pode assumir (cf. eq. 11.19). Olhemos novamente para a equação de movimento acima, vamos reescrevê-la na forma

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 - B \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 = -\epsilon. \quad (11.27)$$

Levando em conta o fato que $\theta = \pi/2$ e $d\theta/d\lambda = 0$ e multiplicando a expressão acima por -1 temos

$$\underbrace{B \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2}_{=g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \epsilon \quad (11.28)$$

Olhando agora para a equação (11.17) da seção anterior, onde definimos o tempo-próprio, é fácil ver que a equação acima vale

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = \begin{cases} c^2 & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (11.29)$$

pois partículas sem massa tem $d\tau = 0$ e portanto $\epsilon = 0$. Este resultado nos diz que na equação do movimento devemos tomar então

$$\epsilon = \begin{cases} c^2 & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (11.30)$$

Substituindo este valor de ϵ em (11.26) vemos que esta equação e (11.19) são idênticas (lembrando que $K = kc$). Integrando a equação em r obtemos $r = r(\lambda)$. Com este resultado em (11.21) e (11.22) obtemos $\phi = \phi(\lambda)$ e $t = t(\lambda)$. Se eliminarmos λ das equações ficamos com $r = r(t)$ e $\phi = \phi(t)$, ou seja, a equação da trajetória. A solução das integrais na métrica de Schwarzschild não é uma tarefa trivial. Obviamente esperamos que no limite Newtoniano $A = B = 1$ recaiamos nas equações de movimento de um potencial central (problema de 2 corpos) com as conhecidas trajetórias que são seções cônicas.

11.4 A Equação de Binet na métrica de Schwarzschild

Sempre que vamos analisar um problema em física usando uma nova teoria – mas que deve conter em si a teoria antiga como caso limite –

devemos recorrer aos resultados conhecidos para ver quais são mantidos e quais mudam. A equação de movimento por nós encontrada não é trivial. Considerando um planeta, por exemplo Mercúrio, sua posição r depende não só do tempo mas também de ϕ . A experiência mostra que a maneira mais fácil de resolver esta equação é através da substituição

$$r = \frac{1}{u} \quad (11.31)$$

Para esta nova variável temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{\ell}{r^2} \end{aligned} \quad (11.32)$$

onde usamos a equação da conservação de momento angular substituindo $\dot{\phi}$ por ℓ/r^2 . Como $r^2 = 1/u^2$ a expressão acima acaba ficando mais simples:

$$\dot{r} = -\ell \frac{du}{d\phi} \quad (11.33)$$

Substituindo esta resultado na equação diferencial em r e multiplicando por $(1 - u r_S)$ chega-se à

$$\frac{K^2}{\ell^2} - \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - u^2 (1 - u r_S) = \frac{c^2}{\ell^2} (1 - u r_S) \quad (11.34)$$

que, rearranjando os termos, nos leva à

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 &= r_S u^3 + \frac{r_S c^2}{\ell^2} u + \frac{K^2 - c^2}{\ell^2} \\ &= \frac{K^2 - c^2}{\ell^2} + \frac{2GM}{\ell^2} u + \frac{2GM}{c^2} u^3, \end{aligned} \quad (11.35)$$

onde usamos a definição $r_S = 2GM/c^2$. Esta equação é a mesma equação (4.25) do livro de Foster e Nightingale³, se identificarmos a variável E daquele livro com nosso $(K^2 - c^2)/\ell^2$, e as variáveis $kc = K$ e $h = \ell$. Derivando esta equação uma vez na variável ϕ obtemos finalmente

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2 + \frac{GM}{\ell^2}, \quad (11.36)$$

que é a generalização da Equação de Binet clássica (11.6) para a métrica de Schwarzschild. No limite $r_S \ll r$ o termo quadrático em u tende a

³ Foster and Nightingale, *op. cit.*, p. 137.

zero. O caso relativístico (11.36) se reduz a uma equação diferencial de 2ª ordem em $u(\phi)$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = a u^2 + b \quad (11.37)$$

com $a = 3GM/c^2$ e $b = GM/(\ell^2)$. Podemos ver que a diferença do caso clássico é que temos um termo de correção relativística au^2 , ou seja, a diferença entre a equação na métrica de Schwarzschild e na métrica plana de Newton é o fator a . Nosso objetivo agora não é calcular a solução exata da equação acima, pois esta é muito difícil de obter. O que faremos daqui para frente é usar argumentos físicos para achar uma solução aproximada.

Alguns livros preferem escrever diretamente a equação (11.35) na forma

$$\frac{du}{d\phi} = \pm \frac{1}{\ell} \sqrt{r_S u^3 \ell^2 + (K^2 - c^2) + r_S c^2 u - \ell^2 u^2} \quad (11.38)$$

ou, como é mais usual

$$\frac{d\phi}{du} = \pm \frac{\ell}{\sqrt{(K^2 - c^2) + r_S c^2 u - \ell^2 u^2 + r_S u^3 \ell^2}} \quad (11.39)$$

pois o termo $-r_S c^2 u + \ell^2 u^2 = -GM/r + \ell^2/r^2$ nada mais é que o potencial efetivo U_{eff} por unidade de massa da mecânica clássica. Classicamente, temos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (11.40)$$

e, levando em conta a conservação de momento angular $\mathcal{L} = mr^2 \dot{\phi}$, podemos escrever

$$m\dot{r}^2 = 2\mathcal{E} - \frac{\mathcal{L}^2}{mr^2} + \frac{GMm}{r} = 2\mathcal{E} - U_{efetivo} \quad (11.41)$$

Isto leva obviamente à expressão:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{E} - U_{efetivo}}{m}}. \quad (11.42)$$

Levando em conta o fato que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mathcal{L}^2}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \quad (11.43)$$

e a transformação $r = 1/u$ conseguimos mostrar com um pouco de cálculo que chegamos à equação

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right)_{class} = \pm \frac{\mathcal{L}/\sqrt{m}}{\sqrt{2\mathcal{E} + r_S c^2 u - \mathcal{L}^2 u^2}} \quad (11.44)$$

Podemos comparar com (11.39) e ver que há na Relatividade Geral um termo da ordem u^3 que pode ser entendido como uma correção relativística ao potencial efetivo. O outro termo é devido ao termo de energia da massa relativístico.

11.5 Característica geral das soluções: órbitas

Para entender de modo geral os tipos de soluções que esperamos das equações do movimento vamos retormar a equação (11.26) junto às equações para t e ϕ , reescrevendo-as na forma

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2}; & ct \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) &= K; & r^2 \dot{\phi} &= \ell \\ \dot{r}^2 - \frac{r_S c^2}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\ell^2}{r^3} &= K^2 - \epsilon = \text{constante} \end{aligned} \quad (11.45)$$

onde lembramos que $\epsilon = c^2$ para partículas com massa e $\epsilon = 0$ para partículas sem massa. Como mostramos podemos escrever a equação diferencial em r na forma

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = \text{const.} \quad (11.46)$$

onde o potencial efetivo $V_{eff}(r)$ vale

$$V_{eff}(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3} & m \neq 0 \\ \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3} & m = 0 \end{cases} \quad (11.47)$$

Os dois potenciais são ilustrados, qualitativamente, na figura abaixo. A

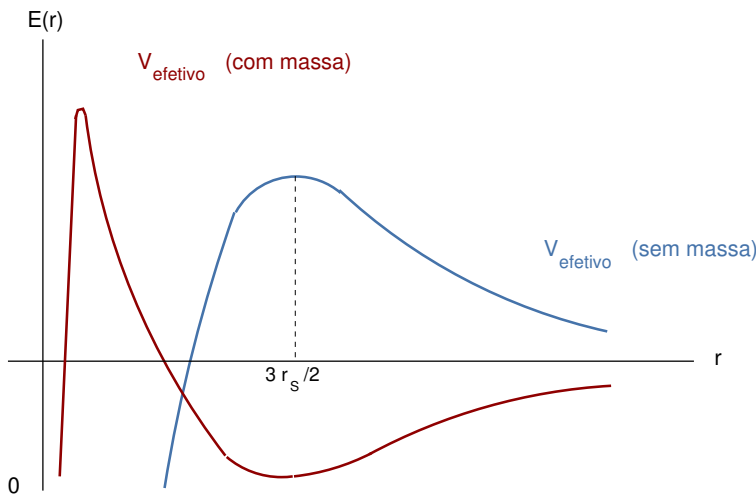


Figura 11.2: Os potenciais efetivos no caso de uma partícula massiva (em vermelho) e para uma partícula sem massa (linha azul) como função da coordenada r . As curvas são obtidas pela combinação do potencial Newtoniano $-GM/r$ (ausente no caso $m = 0$), o termo centrífugo $+\ell^2/r^2$ e o termo relativístico proporcional à $-1/r^3$. No caso massivo, o termo relativístico só se torna importante para raios r muito pequenos, da ordem de $r \sim r_S$. No nosso sistema solar, $r_S \ll R_\odot \ll r_p$ onde r_p é a distância do planeta ao centro do Sol.

solução formal da equação de movimento (11.46) é

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= 2[\text{const.} - V_{eff}(r)] \\ \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{1}{\sqrt{2[\text{const.} - V_{eff}(r)]}} \end{aligned} \quad (11.48)$$

que nos leva finalmente à

$$\lambda(r_1) - \lambda(r_2) = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{\sqrt{2[\text{const.} - V_{eff}(r')]}}, \quad (11.49)$$

Devido ao termo relativístico $\propto 1/r^3$ em V_{eff} , a integral acima é uma integral elíptica que não pode ser resolvida via funções elementares. Mesmo assim é possível analisar qualitativamente as soluções em função do gráfico dos potenciais efetivos.

Discutamos primeiro o potencial para partículas com massa. Para valores de r muito grandes quem domina é o potencial gravitacional Newtoniano $-GM/r$. À medida que o raio diminui, o termo centrífugo $\ell^2/2r^2$ passa a ser mais relevante e se ℓ não for pequeno o suficiente temos um $V_{eff}(r) > 0$. Se r for pequeno o suficiente, o termo relativístico atrativo domina

$$-\frac{GM}{r} \left(\frac{\ell}{rc}\right)^2 v \ll c - \frac{GM}{r} \frac{v^2}{c^2} \quad (11.50)$$

Devemos tomar um certo cuidado ao interpretarmos estes resultados pois pela expressão acima é claro que a equação radial do caso relativístico diferencia-se da equação do caso clássico por termos da ordem v^2/c^2 . Devemos porém considerar o fato que $dr/d\tau$ é diferente de dr/dt e esta diferença também é da ordem de v^2/c^2 .

Próximo ao mínimo de $V_{eff}(r)$ há soluções ligadas (*bound solutions*) que, a semelhança do caso clássico, tem dois pontos de inflexão, um r_{min} e um r_{max} . No caso Kepleriano, sabemos que esta curva representa uma elipse. Porém, como veremos a seguir, o termo perturbativo faz com que as órbitas não se fechem mais: temos a conhecida precessão do periélio da órbita. Esta precessão é particularmente sentida em Mercúrio, devido à sua proximidade do Sol. É possível termos uma órbita circular, a exemplo do problema de Kepler, quando a energia do sistema coincide com o mínimo do potencial efetivo. A solução no máximo é instável pois leva a um \dot{r} que cresce exponencialmente. Para energias positivas temos órbitas abertas (hipérbole) e para valores acima do máximo do potencial, a partícula cai ao centro.

O máximo e mínimo de $V_{eff}(r)$ pode ser facilmente calculado via $dV_{eff}/dr = 0$. Neste caso temos a equação quadrática

$$r^2 - \frac{2\ell^2}{r_S c^2} r + \frac{3\ell^2}{c^2} = 0 \quad (11.51)$$

que tem duas soluções reais

$$\begin{aligned} r_{max} &= \frac{l^2}{r_S c^2} + \frac{\ell}{c} \sqrt{\frac{\ell^2}{r_S^2 c^2} - 3} \\ r_{min} &= \frac{l^2}{r_S c^2} - \frac{\ell}{c} \sqrt{\frac{\ell^2}{r_S^2 c^2} - 3} \end{aligned} \quad (11.52)$$

desde que $l > \sqrt{3} r_S c$. Isto significa que obtemos um mínimo e um máximo da órbita quando o momento angular for maior que o valor crítico

$$\ell_{crit} = \sqrt{3} r_S c \quad (11.53)$$

A medida que $\ell \rightarrow \ell_{crit}$ a barreira de potencial vai se tornando menor e menor até que para $\ell = \ell_{crit}$ o mínimo e máximo coincidem. Abaixo deste valor, o potencial efetivo cai monotonicamente em direção ao centro e uma partícula que venha de fora, independente de sua energia, cai em direção ao centro.

Mas o que ocorre com fótons? Um detalhe importante é que para fótons ambos os termos do V_{eff} são proporcionais à ℓ^2 de modo a forma da curva independe de seu valor (ele apenas muda a escala da curva). Neste caso, quando $r = 3r_S/2$ o potencial tem um máximo. Fótons neste local podem executar um movimento circular, que é no entanto instável. Se a constante da equação (11.46) for menor que V_{eff} , um foton que se move na direção de r menor é espalhado. Se maior, ele cai em direção ao centro.

Esta equação também nos permite acompanhar o movimento para $r \leq r_S$. Para $r = r_S$, próximo ao máximo da curva V_{eff} para $m \neq 0$, não há nada especial pois como foi discutido, esperamos que em torno deste valor tenhamos uma singularidade de coordenadas apenas. Porém a métrica de Schwarzschild por nós obtida não é aplicável para $r < r_S$ pois para um relógio em repouso neste ponto teríamos

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (1 - r_S/r)c^2 dt^2 < 0 \quad (11.54)$$

isto é $d\tau$ é imaginário. Uma vez que a métrica foi obtida para $r > r_0$ onde r_0 é o raio da massa M (métrica exterior) para corpos "normais" esta discussão é meramente acadêmica. Retornaremos a este ponto quando discutirmos buracos negros.

11.6 Aplicação 1: a precessão do periélio de Mercúrio

A precessão do periélio do planeta Mercúrio é uma das mais fascinantes comprovações da TRG de Einstein. Ela depende fundamentalmente da solução de Schwarzschild, razão pela qual insistimos que esta seja talvez a mais importante das soluções das Equações de Einstein. O

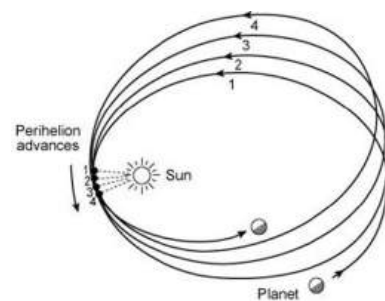


Figura 11.3: A precessão do periélio, pois a órbita não é fechada sobre si. Entre as causas estão o achatamento do Sol nos polos, a influência de outros planetas na órbita e a Relatividade Geral.

periélio, do grego antigo $\pi\epsilon\rho\iota$ (*peri* = próximo) e $\eta\lambda\iota\omicron\varsigma$ (*helios* = Sol) é o ponto da órbita mais próximo ao Sol. No caso de uma estrela ou outro corpo celeste qualquer, este ponto é chamado de periápside. No caso de Mercúrio, sendo a órbita uma elipse que não se fecha sobre si mesma, este ponto se move por um total de $575''$ por século, ou seja, 575 segundos de arco por século. Destes, $532''$ podem ser achados usando a gravitação de Newton considerando-se a atração gravitacional dos outros planetas sobre Mercúrio ⁴. Porém, os $43''$ de arco restantes so puderam ser explicados com a TGR.

Não devemos menosprezar a importância deste problema para a história da astronomia. O astrônomo francês Urbain le Verrier (1811–1877), que previu a existência de Netuno matematicamente observando a anomalia da órbita de Urano, mediu a precessão do periélio de Mercúrio em 1859 como sendo de $565''$. Ele realizou então os cálculos teóricos, segundo a gravitação de Newton, e chegou a um valor de $527''$, faltando portanto $38''$. Esta diferença foi mais tarde melhorado pelas medidas do astrônomo canadense Simon Newcomb (1835 – 1909) para $43''$, que somados aos $532''$ previstos pela teoria, completam o valor de $575''$ experimentalmente observado. É interessante notar que Einstein chegou ao resultado correto em 1914, portanto um antes do trabalho de Schwarzschild ser publicado!

Sabemos da mecânica clássica que há dois potenciais Φ que levam à órbitas fechadas: $\Phi \sim r^2$ e $\Phi \sim 1/r$. Olhando para a expressão (11.39), vemos que ela difere da expressão clássica análoga (11.44) pela adição de dois termos: o termo $(K^2 - c^2)$ é na realidade uma correção da Relatividade Restrita e não altera a forma das órbitas. O termo cúbico é quem na verdade faz com que as órbitas não mais sejam fechadas. A solução clássica de órbitas elípticas

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{\ell^2} [1 - e \cos \varphi]; \quad e = -\frac{A\ell^2}{GM}. \quad (11.55)$$

nos diz que, dado um φ_0 inicial ao qual corresponde um $r(\varphi_0) = r_0$, completada uma órbita, isto é quando $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ temos $r(\varphi_0 + 2\pi) = r_0$. Na Relatividade Geral observamos um desvio desta periodicidade: a precessão do periélio. A órbita de Mercúrio – apesar de ser a de maior excentricidade e entre os planetas do sistema solar com $e = 0.206$ – ainda assim é muito próxima de um círculo. Um círculo é obviamente caracterizado por ter um raio r (ou raio inverso $u = 1/r$) que não depende de φ . Portanto, tomando a equação fundamental (11.36), a equação do círculo é dada igualando $d^2u/d\varphi^2 = 0$, ou seja,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a u^2 + b \rightarrow u_0 = a u_0^2 + b, \quad (11.56)$$

⁴ Um modelo simples que usa a teoria da gravitação de Newton para calcular este efeito foi apresentando no artigo de M. P. Price e W. F. Rush, *Non relativistic contribution to Mercury's perihelion*, Am. J. Phys. 47(6) (1979), 531 - 534. Nele os autores consideram os planetas exteriores como um anel de densidade uniforme de massa $\lambda_i = M_i/2\pi R_i$ onde M_i é a massa do i -ésimo planeta e R_i o raio de sua órbita.

que é a equação de um círculo de raio $1/u_0$. Vamos supor agora que tenhamos um pequeno desvio da órbita circular, isto é, um desvio u_1 tal que $u_1 \ll u_0$. Substituindo nossa solução $u = u_0 + u_1$ na equação diferencial original obtemos:

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 + u_0 = a(u_0 + u_1)^2 + b \quad (11.57)$$

ou seja

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = 2au_0 u_1 + au_1^2. \quad (11.58)$$

Sendo u_1 muito pequeno podemos desprezar o termo quadrático em u_1 e escrever finalmente

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + (1 - 2au_0)u_1 = 0. \quad (11.59)$$

Esta equação diferencial harmônica tem como solução

$$u_1 = \epsilon \cos(\sqrt{1 - 2au_0} \phi) \quad (11.60)$$

onde ϵ é uma constante. A solução é portanto

$$u = u_0 + u_1 = u_0 [1 + \epsilon \cos(\sqrt{1 - 2au_0} \phi)], \quad (11.61)$$

ou, escrevendo em termos do raio r

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} [1 + \epsilon \cos(\sqrt{1 - 2a/r_0} \phi)]. \quad (11.62)$$

Para $a = 0$ temos a solução clássica de Newton. Porém, se $a \neq 0$ o valor de r mínimo (periélio) não mais ocorre a cada incremento de 2π na variável ϕ mas passado um intervalo de $2\pi/\sqrt{1 - 2au_0}$, ou seja, dado um ponto onde ocorreu um mínimo para r , o próximo mínimo não ocorrerá no mesmo ângulo ϕ do último periélio mas em um outro ângulo cuja diferença $\Delta\phi$ do ângulo anterior é

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2au_0}} - 2\pi \quad (11.63)$$

Podemos se quisermos expandir o termo o primeiro termo da expressão acima na forma

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2au_0}} \approx 1 + au_0, \quad (11.64)$$

que nos leva então à

$$\Delta\phi = 2\pi au_0. \quad (11.65)$$

Substituindo a por $3r_S/2$ chegamos finalmente à

$$\Delta\phi = 3\pi \frac{r_S}{r_0} \quad (11.66)$$

Inserindo os valores para Mercúrio nesta expressão obtemos $\Delta\phi = 5.03 \times 10^{-7}$ rad. Isto é exatamente igual à $43''$ de arco, que era o fator que faltava no cálculo newtoniano para chegar ao resultado observado experimentalmente! A tabela abaixo apresenta as contribuições para a precessão de Mercúrio devido a uma série de fatores: a atração gravitacional dos outros planetas sobre Mercúrio, o fato do Sol não ser uma esfera perfeita, o efeito relativístico de Lense-Thirring e resultado previsto pela métrica de Schwarzschild que acabamos de deduzir ⁵.

Origem [†]	Valor
Atração grav. de planetas	532.3035''
Oblaticidade do Sol	0.0286''
Relatividade Geral	42.9799''
Precessão de Lense-Thirring	0.0020''
Total previsto	575.31''
Total observado*	574.10 ± 0.65''

Um fato curioso: todo bom livro de mecânica clássica traz um capítulo sobre o problema de 2 corpos interagindo via um potencial central e as soluções em termos de órbitas fechadas (elipses). Entre os problemas sugeridos ao final do capítulo se encontra muitas vezes um sobre a possibilidade da órbita não se fechar, levando à precessão do periélio. Isto se dá pela introdução de um termo perturbativo no potencial, que muitas vezes nos deixa em dúvida sobre o porquê exatamente o termo perturbativo ter a forma que tem. Translitero aqui o problema 1.12 do excelente livro de Mecânica Clássica de Fetter e Walecka ⁶:

1.12. *The orbit of the planet mercury has an eccentricity 0.206 and a period 0.241 year; moreover, the perihelion advances slowly at a rate of 43 seconds of arc per century. One possible explanation of this is that the potencial energy around the sun has the form $V = -(mMG/r)(1 + \alpha GM/rc^2)$ where α is a dimensionless constant and $MG/c^2 \approx 1.475$ km characterizes the sun's gravitational field. Demonstrate that the resulting orbit indeed represents a precessing ellipse. Find the magnitude and sign of α needed to fit the observed data.*

Bem, se muitas vezes não entendemos o porquê de alguns livros tirarem certos termos mágicos da cartola, um dia eventualmente acabaremos descobrindo. Basta ter perseverança e nunca desistir!

Problema. O argumento usado para resolver a equação (11.36) por meio de uma solução aproximada $y = y_0 + y_1$ com $y_1/y_0 \ll 1$ foi o fato da órbita de Mercúrio ser quase circular. Porém, podemos analisar esta equação sob um outro ponto de vista: a diferença entre a versão clássica (11.6) e a versão relativística (11.36) é o termo quadrático em y . Desprezar este termo da equação significa dizer que ele deve ser algumas ordens de grandeza menor que o termo clássico. Usando os dados conhecidos do planeta Mercúrio, estime a razão

⁵ O efeito relativístico descoberto em 1918 por Josef Lense (1890-1985) e Hans Thirring (1888-1986) diz respeito à contribuição devido à rotação da massa central, no nosso caso o Sol.

Tabela 11.1: [†] R. S. Park *et al.*, *Precession of Mercury's Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft*, *The Astronomical Journal*. 153 (3) (2017), 12.

* G. M. Clemence, *The Relativity Effect in Planetary Motions*, *Reviews of Modern Physics*. 19 (4) (1947) 361-364.

⁶ A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, *International Series in Pure and Applied Physics*, McGraw-Hill, New York, 1980, pag. 29.

entre o termo relativístico e o termo clássico e mostre que ele é da ordem de $(v/c)^2$, onde v é a velocidade orbital de Mercúrio. Com isto diga se nossa aproximação é justificada. Os dados de Mercúrio são: período da órbita = 87.96 dias; raio médio da órbita = 57.9×10^6 km; massa do Sol $M = 1.98 \times 10^{30}$ kg. Lembre-se que L é o momento angular por unidade de massa ⁷.

⁷ Dica: para fazer a estimativa, lembre que não basta calcular a constante que multiplica y^2 mas incluir a expressão inteira, com uma estimativa do valor de y^2 para este problema.

Todos os planetas do sistema solar apresentam uma precessão do periélio, sendo o de Mercúrio o maior deles. O de Netuno, Urano e Plutão não são conhecidos pois seus períodos orbitais ultrapassam o tempo médio de uma vida humana e não há dados coletados. Um extenso e excelente artigo de revisão sobre o assunto é o de G. C. Nyambuya ⁸.

⁸ G. C. Nyambuya, *Azimuthally symmetric theory of gravitation – I. On the perihelion precession of planetary orbits*, Mont. Not. R. Astr. Soc. 403 (2010), pp. 1381-1391.

Planeta	valor calculado	valor medido
Terra	3.8''	5.0'' \pm 1.2''
Vênus	8.6''	8.4'' \pm 4.8''
Mercúrio	43.03''	43.11'' \pm 0.45''

Tabela 11.2: Precessão do periélio da Terra, de Vênus e de Mercúrio em segundos de grau por século. Em: Eckhard Rebhan, *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie*, Spektrum Akademischer Verlag, Springer-Verlag, Berlin u. Heidelberg, 2012, p. 307.

11.7 A deflexão da luz pela curvatura do espaço

Vamos determinar agora um efeito muito interessante: o da deflexão da luz pelo campo gravitacional (em linguagem clássica) ou pela curvatura do espaço (em linguagem relativística). Para isto partamos da equação (11.27) para $r(\lambda)$ e tomar o plano da trajetória como sendo o plano equatorial, isto é $\theta = \pi/2$. λ é uma grandeza que parametriza a curva. Temos assim

$$\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{K^2/B - \ell^2/r^2 - \epsilon}{A}}. \quad (11.67)$$

Lembrando que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} \quad (11.68)$$

e o fato que

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \ell = \text{constante} \quad (11.69)$$

Obtemos da equação do movimento uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\ell^2}{r^2} \sqrt{\frac{A}{K^2/B - \ell^2/r^2 - \epsilon}} \quad (11.70)$$

e com isto a equação da trajetória $\phi(r)$ na forma da integral indefinida

$$\phi = \int \frac{dr}{r^2} \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(r)\ell^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{\ell^2}}} \quad (11.71)$$

Caso a partícula tivesse massa usaríamos $\epsilon = c^2$. Para o fóton, no qual estamos interessados aqui, temos $\epsilon = 0$. Obtemos assim a equação da trajetória de um fóton na métrica de Schwarzschild na forma

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{\sqrt{A(r')}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(r')\ell^2} - \frac{1}{r'^2}}} \quad (11.72)$$

Como ponto r_0 da integração podemos escolher o ponto de distância mínima em relação à massa que gera a curvatura, neste caso nosso Sol. Tomemos neste caso $\phi(r_0) = 0$. De r_0 para $r \rightarrow \infty$ o ângulo muda por um valor de $\phi(\infty)$. Segundo o desenho abaixo, desde sua origem $r \rightarrow -\infty$ até $r \rightarrow \infty$ o raio vetor gira por um ângulo de $2\phi(\infty)$. Se não houvesse a deflexão, isto é se a trajetória fosse reta, este ângulo seria igual a π . Com a deflexão, este desvio se torna

$$\Delta\phi = 2\phi(\infty) - \pi \quad \text{para} \quad \phi(r_0) = 0 \quad (11.73)$$

A figura abaixo ilustra a geometria do problema.

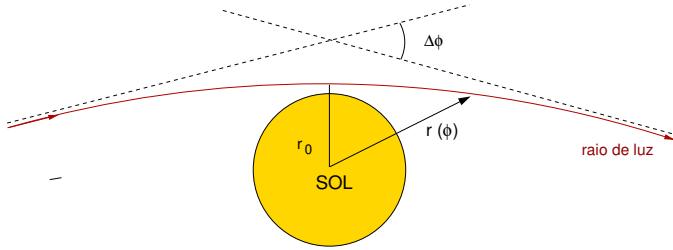


Figura 11.4: No campo gravitacional do Sol, um raio de luz sofre uma deflexão por um ângulo $\Delta\phi$ em relação à trajetória reta. A figura é apenas ilustrativa pois para um raio que passa rente ao Sol (*grazing ray*) o desvio é pequeno, e vale $\Delta\phi = 1.75 \text{ arcsec}$.

Uma vez que $A(r) \neq 1$ na métrica de Schwarzschild, o espaço 3-d não é Euclidiano como na figura acima, o que significa que a devemos ter um certo cuidado ao interpretar esta figura. Assintoticamente sabemos que $A \rightarrow 1$ e $B \rightarrow 1$ e nestas regiões o raio é uma reta no espaço Euclidiano. A curvatura é sentida pelo raio na região entre as assíntotas, e a equação (11.72) a descreve corretamente. Em r_0 temos que $r(\phi)$ temos um mínimo e portanto

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)_{r_0} = 0 \quad (11.74)$$

e de (11.72) segue que

$$\frac{K^2}{\ell^2} = \frac{B(r_0)}{r_0^2} \quad (11.75)$$

Isto significa que podemos eliminar a constante K^2/ℓ^2 , escrevendo-a como função de r_0 e substituindo o resultado na equação, o que nos leva à:

$$\phi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\frac{r^2 B(r_0)}{r_0^2 B(r)} - 1}} \quad (11.76)$$

Para resolver esta integral usamos a expansão de Robertson (vide apêndice 2)

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 + \gamma \frac{r_S}{r} + \dots \\ B(r) &= 1 - \frac{r_S}{r} + \dots \end{aligned} \quad (11.77)$$

onde mantivemos termos até ordem r_S/r . Com esta expansão temos

$$\begin{aligned} \frac{r^2 B(r_0)}{r_0^2 B(r)} - 1 &\approx \frac{r^2}{r_0^2} \left[1 + r_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] - 1 \\ &= \left[\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right] \left[1 - \frac{r_S r}{r_0(r + r_0)} \right] \end{aligned} \quad (11.78)$$

Substituindo esta expressão na integral obtemos

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \frac{r_0}{r} \left(1 + \gamma \frac{r_S}{2r} + \frac{r_S}{2r_0(r + r_0)} \right) \\ &= \left[\arccos \frac{r_0}{r} + \gamma \frac{r_S}{2r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} + \frac{r_S}{2r_0} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right]_{r_0}^{\infty} \end{aligned} \quad (11.79)$$

Substituindo os valores obtemos

$$\phi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{r_S}{2r_0} + \frac{r_S}{2r_0} \quad (11.80)$$

E usando a expressão para $\Delta\phi$ chegamos finalmente à

$$\Delta\phi = \frac{2r_S}{r_0} \frac{1 + \gamma}{2} \quad (11.81)$$

Este resultado mostra que quando mais próximo do Sol passa o fóton, maior sua deflexão. Usando então os valores aproximados

$$r_0 \approx R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ km} \quad e \quad r_S = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \approx 3.0 \text{ km} \quad (11.82)$$

obtemos um ângulo (em arcosegundos) dado por

$$\Delta\phi = 1.75'' \frac{1 + \gamma}{2} \quad (11.83)$$

Os experimentos clássicos (Sobral e Ilha Príncipe) durante o eclipse solar de 25.5.1919 consistiam em medir a posição de estrelas próximas ao perímetro solar. A posição de uma estrela nestas condições parecerá ter se desviado por um certo ângulo em relação às estrelas fixas. A grande dificuldade destes experimentos foi a observação desta deflexão através da aura solar.

Atualmente usam-se quasares que se encontram em uma posição que, uma vez ao ano, são encobertos pelo Sol (não havendo assim a necessidade de esperar um eclipse total). Usando interferometria de

ondas de rádio por rádio telescópios distantes entre si (VLBI, *very long baseline radio interference*), os resultados mais atuais dão um valor de ⁹:

$$\gamma = 0.99984 \pm 0.00028 \quad (11.84)$$

Os resultados obtidos com óptica clássica levam a um $\gamma = 1$ mas com erros bem maiores. Isto mais uma vez confirma a métrica de Schwarzschild ($\gamma = 1$), descartando a métrica Newtoniana ($\gamma = 0$). Abaixo reproduzo uma tabela do livro de Weinberg ¹⁰.

Eclipse	Local	Número de estrelas	r_0/R_\odot	$\Delta\phi$ (sec)	Ref.
29.05.1919	Sobral	7	2 - 6	1.98 ± 0.16	a
	Príncipe	5	2 - 6	1.61 ± 0.40	a
21.09.1922	Austrália	11 - 14	2 - 10	1.77 ± 0.40	b
		18	2 - 10	1.42 à 2.16	c
		62 - 85	2.1 - 14.5	1.72 ± 0.15	d
		145	2.1 - 42	1.82 ± 0.20	e
09.05.1929	Sumatra	17 - 18	1.5 - 7.5	2.24 ± 0.10	f
19.06.1936	URSS	16 - 29	2 - 7.2	2.73 ± 0.31	g
	Japão	8	4 - 7	1.28 à 2.13	h
20.05.1947	Brasil	51	3.3 - 10.2	2.01 ± 0.27	i
25.02.1952	Sudão	9 - 11	2.1 - 8.6	1.70 ± 0.10	j

⁹ D. Walsh *et. al.*, Nature 279 (1979), 301.

¹⁰ S. Weinberg, *op. cit.*, p. 193.

Tabela 11.3: Medidas da deflexão da luz pelo Sol.

^a F.W. Dyson, A.S Eddington, C. Davidson, *Phil. Trans. Roy. Soc.* 220 A (1920), 291; *Mem. Roy. Soc.* 62 (1920), 291.

^b G.F. Dodwell, C.R. Davidson, *Mon. Nat. Roy. Astro. Soc.* 84 (1924), 150.

^c C. A. Chant, R.K Young, *Publ. Dominion Astron. Obs.* 2 (1924), 275.

^d W.W. Campbell, R. Trumpler, *Lick Observ. Bull.* 11 (1923), 41; *Publ. Astron. Soc. Pacific* 35 (1923), 158.

^e W.W. Campbell, R. Trumpler, *Lick Observ. Bull.* 13 (1928), 130.

^f E.F. Freundlich, H.v.Klüber, A.v.Brunn, *Ab. Preuss. Akad. Wiss.* 1 (1931); *Z. Astrophys.* 3 (1931), 171.

^g A.A. Mikhailov, *C. R. Acad. Sci. USSR (N.S.)*, 29 (1940), 189.

^h T. Matukuma, A. Onuki, S. Yosida, Y. Ywana, *Jap. J. Astron. and Geophys.* 18 (1940), 51.

ⁱ G. van Biesbroeck, *Astr. J.* 55 (1949), 247.

^j G. van Biesbroeck, *Astr. J.* 58 (1953), 87.

11.8 Lentes Gravitacionais

Uma das consequências da deflexão da luz por um campo gravitacional de simetria esférica é que um feixe de raios paralelos pode ser focado da mesma maneira que numa lente convexa. Olhando mais atentamente para a figura abaixo vemos que surge não um foco mas toda uma linha focal. Para um ponto P fora da linha focal mas dentro da região de sobreposição de raios veríamos duas estrelas ao invés de uma (supondo que o feixe de raios paralelos provenha da mesma estrela). Caso estivéssemos exatamente sobre a linha focal, por questão de simetria nossa primeira impressão é que veríamos uma imagem da estrela na forma de um círculo (ou anel de luz). Porém nesta região não se pode mais aplicar os resultados da óptica geométrica e cálculos mais preciso que levam em conta o caráter ondular da luz mostra que veríamos na realidade um ponto de luz de maior intensidade.

O fenômeno da duplicidade de imagens para um observador que se encontra na região de sobreposição de raios se chama **lente gravitacional**.

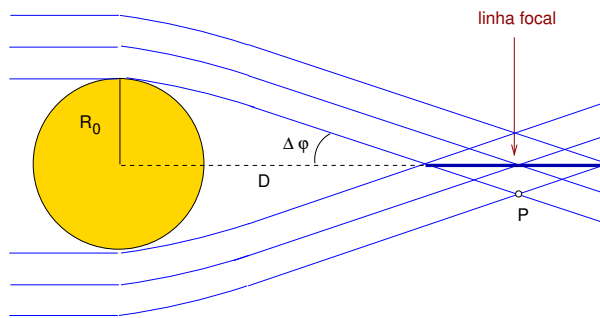


Figura 11.5: A lente gravitacional de um corpo massivo de raio R_0 . Num ponto sobre a linha focal veríamos a estrela como um ponto de luz mas de maior intensidade. Num ponto P ainda dentro da região de sobreposição de raios mas fora da linha focal veríamos 2 estrelas no lugar de apenas uma.

Pela figura temos

$$\frac{R_0}{D} = \tan \Delta\varphi \quad (11.85)$$

onde R_0 é o raio do corpo que gera a curvatura do espaço e D a distância de seu centro até o ponto onde começa a região de sobreposição. Para o caso de fótons por nós estudados na seção anterior temos $\Delta\varphi \ll 1$ e portanto podemos aproximar $\tan \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Portanto a distância D do astro à região de início do efeito de lente gravitacional é, nesta aproximação

$$D = \frac{R_0}{\Delta\varphi} \quad (11.86)$$

Problema. Estime a distância D da expressão acima para o nosso Sol. Expresse sua resposta em termos de R_\odot (raio do sol) e anos-luz. Estime também o valor de D para a estrela *VY Canis Majoris*, uma das maiores estrelas conhecidas, com um raio de $2069 R_\odot$ e uma massa da ordem de $M = 17 \pm 8 M_\odot$. Para fazer sua estimativa tome o maior valor de massa. Você pode tirar alguma conclusão destes resultados em termos da observabilidade de lentes gravitacionais causadas por estrelas?

O que é mais curioso é que este efeito foi previsto em 1912 por Einstein antes que tivesse concluído a sua TGR, pois é possível calcular a trajetória da luz numa dada métrica $g_{\mu\nu}$ sem ter que resolver as equações de Einstein. O efeito porém pareceu tão absurdo a Einstein que ele não publicou seu resultado e só foi convencido de fazê-lo em 1936. A descoberta experimental só foi feita 67 anos depois, em 1979, por Walsh e colaboradores, citado acima..

Estrelas: equilíbrio, colapso e a métrica interior de Schwarzschild

Campos gravitacionais são normalmente fracos e para grande parte dos fenômenos, astrofísicos podem desprezar a Relatividade Geral. Porém, há muitos corpos para os quais os efeitos relativísticos são importantes e dominam a física: estrelas de nêutrons, anãs-brancas, quasares e buracos negros. Através de uma combinação de argumentos de Mecânica Estatística, Mecânica de Fluidos, Mecânica Quântica e Relatividade Geral podemos estabelecer critérios de estabilidade e colapso estelar e discutir, dentro deste contexto, a métrica interna de Schwarzschild e suas consequências para a dinâmica interna de corpos massivos.

12.1 Equilíbrio estelar

Depois de estudarmos a solução das Equações de Einstein na forma de uma métrica com simetria esférica no vácuo – a solução externa de Schwarzschild – veremos neste capítulo as soluções com as mesmas características de simetria mas na presença de matéria. A principal área de aplicação destas soluções são as estrelas que podem, com boa aproximação, serem tratadas como esferas. Há duas forças principais atuando sobre uma estrela: a pressão exercida pela matéria nela presente – pressão no sentido termodinâmico do termo – e a atração gravitacional que esta mesma matéria exerce. As duas pressões atuam em sentidos contrários. A pressão da matéria atua no sentido da expansão do astro e a pressão gravitacional, sendo atrativa, atua na sua contração. Por isto, uma estrela se encontra em equilíbrio quando a pressão gravitacional P_{grav} é exatamente igual à pressão da matéria P_{mat} que a compõe:

$$P_{grav} = P_{mat} \quad (12.1)$$

Para ter uma idéia, na *superfície* da Terra temos uma pressão gravitacional que é de aproximadamente 1 bar, pressão esta causada pelo peso

da atmosfera. Este peso comprime a atmosfera de tal maneira que, considerando a atmosfera como um gás ideal, temos

$$P_{mat} = \frac{\rho k_B T}{m} \approx 1 \text{ bar} \quad (12.2)$$

onde ρ é densidade do ar, k_B a constante de Boltzmann, T a temperatura absoluta e m a massa das moléculas do ar. Os aspectos termodinâmicos são em grande medida por nós conhecidos e a pergunta principal é até que ponto devemos levar em conta efeitos relativísticos no estudo de estrelas. No caso da métrica de Schwarzschild

$$\begin{aligned} ds^2 &= B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (12.3)$$

sabemos que a escala é dada por r_S . Como para estrelas “normais” como o Sol a razão $r_S/r \ll 1$, os efeitos relativísticos são desprezíveis. Estes efeitos só passam a ter importância para estrelas cujo raio é aproximadamente igual ao raio de Schwarzschild. É possível obter uma boa estimativa a partir destas considerações mesmo quando tomamos a massa da estrela como sendo dada pela fórmula (Euclideana) $M = (4\pi/3)r^3\rho$ onde ρ é a densidade média da estrela e r seu raio. Isto implica que uma estrela cuja raio é aproximadamente r_S tem uma densidade

$$\rho \approx \frac{3M}{4\pi r_S^3} \quad (12.4)$$

Para termos uma idéia da ordem de grandeza envolvida, usemos a densidade do Sol $\rho_\odot = 3M_\odot / * 4\pi R_\odot^3 \sim 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ para estimar a densidade ρ de uma estrela cujo raio seja aproximadamente igual a seu raio de Schwarzschild:

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^3 = \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{R_\odot}{r_{S,\odot}}\right)^3 \left(\frac{r_{S,\odot}}{r_S}\right)^3 \quad (12.5)$$

onde $r_{S,\odot} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m}$ é o raio de Schwarzschild do Sol. Usando também o valor conhecido $R_\odot \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ obtemos

$$\rho \approx 1.3 \cdot 10^{16} \rho_\odot \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \quad (12.6)$$

Isto significa que uma estrela com a massa aproximada do nosso Sol tem que ser 10^{16} vezes mais densa que ele para que os efeitos relativísticos sejam importantes.

A pergunta que devemos nos fazer é: existem estrelas com esta densidade? A fonte da pressão da matéria nas estrelas são as fusões nucleares. Quando estas cessam, cai a temperatura e conseqüentemente a pressão: a força gravitacional se torna cada vez maior até o ponto em

que todos os átomos e íons são comprimidos a tal ponto que nos resta apenas um plasma degenerado de núcleons e elétrons (a energia dos elétrons crescem a tal ponto que eles não mais se ligam aos núcleons). A pressão de Fermi do gás de elétrons pode ser tão forte que ela consegue compensar o efeito da gravidade, atingindo assim um novo equilíbrio. Neste estágio temos uma anã-branca que, como veremos mais detalhadamente abaixo, é caracterizada por

$$\frac{r}{r_S} \approx 2000, \quad \rho \approx 2 \cdot 10^7 \rho_{\odot} \quad (12.7)$$

Como veremos também existe uma condição extra sobre a massa de uma estrela deste tipo (devido as propriedades do gás de Fermi), a chamada Massa Limite de Chandrasekhar $M_C = 1.4 M_{\odot}$. Em estrelas com massa acima deste valor a pressão de Fermi não consegue contrabalançar a atração gravitacional.

Quando uma estrela tem um massa maior que a Massa de Chandrasekhar, a pressão gravitacional aumenta a tal ponto que a seção de choque da reação $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ – a reação inversa do decaimento beta do nêutron – aumenta consideravelmente. Com o desaparecimento progressivo dos elétrons cai a pressão de Fermi e a estrela colapsa, até o ponto em que a pressão de Fermi dos nêutrons seja forte o suficiente para se contrapor à gravitação. Neste processo ocorre uma explosão, com ejeção de grande parte da matéria no espaço e, em questão de horas, a diminuição da intensidade da estrela por algumas ordens de grandeza: temos uma *supernova*. Quando a massa inicial da estrela é grande o suficiente, da ordem $M \geq 10 M_{\odot}$, pode sobrar no final uma estrela composta apenas de nêutrons, com uma pressão de Fermi que leva a um novo equilíbrio. Estrelas de nêutrons são caracterizadas por

$$\frac{r}{r_S} \approx 3, \quad \rho \approx 4 \cdot 10^{15} \rho_{\odot} \quad (12.8)$$

Estas densidades são da ordem da densidade de núcleos atômicos, razão pela qual podemos encarar uma estrela de nêutrons como um grande núcleo atômico. Para elas existe também uma massa crítica limite, a Massa de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

$$M_{TOV} \approx 30 M_{\odot}. \quad (12.9)$$

Estrelas com massas superiores a esta, terminados os ciclos de fusão nuclear, não conseguem evoluir para anãs-brancas ou estrelas de nêutrons: elas sofrem um colapso e se tornam *buracos negros*.

12.2 Estimando valores

Para entendermos como se chega às estimativas acima, tomemos a estrela como sendo um gás (clássico ou quântico, como veremos)

com uma distribuição esférica e estática de massa. A idéia basicamente a combinação de dois passos:

1. para achar P_{grav} combinamos noções de hidrodinâmica com gravitação clássica, isto é usamos a equação de Euler para fluidos invíscidos (sem viscosidade) para entender como a gravidade atua sobre o gás.
2. para achar P_{mat} fazemos o uso de um modelo clássico (gás ideal) ou quântico (gás de Fermi) para relacionar a energia das partículas com a pressão.

Nosso ponto de partida é a Equação de Euler da mecânica de fluidos: (7.3)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_0, \quad (12.10)$$

onde \mathbf{f}_0 é a densidade de força externa que atua sobre um elemento de volume ΔV do gás. Como estamos partindo da hipótese que a distribuição de matéria é estática, $\mathbf{v} = 0$ e portanto a equação acima se reduz á

$$\nabla P_{grav} = \mathbf{f}_0. \quad (12.11)$$

No nosso caso \mathbf{f}_0 é a força gravitacional, cujo efeito sobre um elemento de massa dm do gás vale $d\mathbf{F} = -dm \nabla \Phi$, onde Φ é o potencial gravitacional Newtoniano. Uma vez que $\rho = dm/dV$ temos

$$\mathbf{f}_0 = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\frac{dm \nabla \Phi}{dV} = -\rho \nabla \Phi. \quad (12.12)$$

Sendo a distribuição de massa esfericamente simétrica temos $P_{grav} = P_{grav}(r)$ e a Equação de Euler se torna, neste caso

$$\frac{dP_{grav}}{dr} = -\rho(r) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (12.13)$$

Da gravitação Newtoniana sabemos porém que

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) \quad (12.14)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 4\pi G r^2 \rho(r) \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \\ &= \frac{G}{r^2} \int \underbrace{dr' 4\pi r'^2 \rho(r')}_{=M(r)} \\ &= \frac{GM(r)}{r^2} \end{aligned} \quad (12.15)$$

onde usamos o fato que a massa $M(r)$ da distribuição é dada pela integral da densidade sobre o volume $\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$. Disto chegamos à

$$\frac{dP_{grav}}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (12.16)$$

Esta é a equação clássica da pressão gravitacional P_{grav} que atua sobre uma distribuição de massa devido à força gravitacional. Porém, da condição de equilíbrio $P_{grav} = P_{mat}$ necessitamos de uma equação de estado do tipo $P_{mat} = \text{constante}$ ou $P_{mat} = \rho k_B T / m$, em suma $P = P(\rho)$. Dada uma *equação de estado* podemos estimar as condições que devemos impor sobre uma estrela para que ela esteja em equilíbrio.

A solução mais simples para P_{grav} é aquela de um gás incompressível, e portanto $\rho(r) = \rho_0 = \text{constante}$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -G \left(\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \right) r \frac{\rho_0}{r^2} \\ &= -\frac{4}{3} \pi G \rho_0^2 r \\ \rightarrow P &= P_0 - \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2 \end{aligned} \quad (12.17)$$

onde P_0 é a pressão gravitacional no centro da distribuição. Assumindo que a estrela tenha um raio R , na sua superfície devemos ter $P(R) = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2 \\ &= \frac{2\pi}{3} G \rho_0 \left(\frac{M}{4\pi R^3/3} \right) R^2 \\ &= \frac{1}{4} \rho_0 c^2 \left(\frac{2GM}{c^2} \right) \frac{1}{R} \\ &= \rho_0 c^2 \frac{r_S}{4R} \end{aligned} \quad (12.18)$$

Este importante resultado é usado como *estimativa* de equilíbrio para estrelas mesmo não sendo a densidade constante:

$$\frac{r_S}{R} \sim 4 \frac{P}{\rho c^2} \quad (\text{Equilíbrio estelar}) \quad (12.19)$$

Esta equação relaciona o raio R de equilíbrio de uma estrela com o raio de Schwarzschild r_S . Veremos no capítulo posterior como fazer estimativas mais precisas desta relação pois a) a hipótese de densidade constante é uma simplificação e b) há casos em que a gravitação Newtoniana não é adequada pois efeitos da métrica são significativos. Porém a equação acima nos permite ter uma idéia da dimensão de certas estrelas e principalmente de sua evolução. Vejamos alguns casos de interesse.

12.2.1 O Sol

Tomemos o nosso Sol como padrão de uma estrela “normal”. Nestas estrelas a pressão cinética do gás mantém o balanço com a atração gravitacional, impedindo que a estrela colapse. Usamos para a pressão a lei do gás ideal

$$P = \frac{\rho k_B T}{m} \quad (12.20)$$

de onde obtemos, da condição de equilíbrio

$$\frac{r_S}{R} \sim 4 \frac{P}{\rho c^2} = 4 \frac{k_B T}{m c^2} \quad (12.21)$$

O Sol é formado basicamente por átomos de H de tal modo que

$$m c^2 \approx 1 \text{ GeV} \quad (12.22)$$

Já a temperatura do Sol no interior do Sol é aquela gerada por fusões nucleares e o valor estimado é de

$$k_B T \sim 1 \text{ keV} \quad (12.23)$$

Nesta temperatura (da ordem de 10^7 K) os átomos de Hidrogênio estão completamente ionizados. Segundo a lei do gás ideal os prótons e elétrons contribuem igualmente para a pressão $P = N k_B T / V$ pois a densidade N/V é igual para os dois. Já a massa dos elétrons é desprezível frente à do próton e o m usado acima é o do próton. Estes valores aproximados nos levam finalmente à

$$\frac{r_S}{R} \sim 4 \frac{k_B T}{m c^2} 10^{-6} \quad (12.24)$$

Para o Sol sabemos que $r_{S,\odot} = 3 \text{ km}$ o que leva à uma estimativa para o raio de equilíbrio:

$$R \approx 2.5 \cdot 10^5 r_{S,\odot} = 750\,000 \text{ km} \quad (12.25)$$

Este valor é bastante próximo do valor $R_\odot = 696\,000 \text{ km}$. Como $r_S \ll R$ isto significa que os efeitos relativísticos da gravitação são irrelevantes para a evolução de uma estrela neste estágio.

12.2.2 Anãs-Branças

Em estrelas como nosso Sol a principal fusão entre núcleons é a de H se tornando He . Quando a pressão e temperatura caem no interior destas estrelas, podem aparecer outros produtos de diferentes ciclos de fusão nuclear – dependendo da massa da estrela – como por exemplo He para C . Outras cadeias de fusão para elementos mais pesados só ocorrem em estrelas com massa grande o suficiente. Terminado

os ciclos de fusão, a estrela esfria por irradiação e para temperaturas suficientemente baixas (tomamos para facilitar $T \approx 0$) temos átomos neutros, como por exemplo He e C . Porém, devido à gravidade que não é mais totalmente compensada pela P_{mat} , os átomos são comprimidos e a eletrosfera não suporta a pressão gravitacional: forma-se um gás de elétrons. Este gás de elétrons exerce uma pressão de Fermi que se opõe à gravidade ¹. *Estrelas para as quais a pressão do gás de Fermi mantém em balanço a pressão gravitacional são chamadas de anãs-brancas.*

Para uma estrela de volume V e N elétrons cada elétron tem um volume efetivo V/N para si. Do princípio da incerteza de Heisenberg temos então um valor médio para o momentum do elétron vale

$$p \sim \frac{\hbar}{(V/N)^{1/3}}. \quad (12.26)$$

Sendo um gás, este momentum leva a uma pressão cinética, da mesma maneira que o movimento térmico leva a uma pressão. Porém, como assumimos que $T \approx 0$ esta pressão térmica não está presente e temos somente a pressão cinética. Para determinar as condições de equilíbrio podemos usar o princípio da minimização da energia. A energia de um elétron de momentum p é, segundo a relatividade

$$\epsilon = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (12.27)$$

Há dois casos a considerar: elétrons relativísticos e não relativísticos, isto é

$$\epsilon \approx \begin{cases} m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e} + \dots & (p \ll m_e c) \\ cp + \dots & (p \gg m_e c) \end{cases} \quad (12.28)$$

Para nossas considerações a energia de repouso $m_e c^2$ é irrelevante pois independe do raio da estrela e podemos desprezá-la. Sendo também os elétrons não relativísticos, não há conversão de energia de repouso em outras formas de energia. A energia cinética do gás de N elétrons se torna assim

$$E_{mat} \approx \begin{cases} N \frac{p^2}{2m_e} \sim \frac{N^{5/3} \hbar^2}{R^2 m_e} & (p \ll m_e c) \\ Ncp \sim \frac{N^{4/3} \hbar c}{R} & (p \gg m_e c) \end{cases} \quad (12.29)$$

onde usamos o resultado do valor médio de p obtido do princípio da incerteza, depois de substituir V por $4\pi R^3/3$, deixando também os fatores numéricos de fora, pois estamos interessados em ordens de grandeza apenas. A energia foi por nós chamada de E_{mat} pois ela dá origem à P_{mat} que se opõe à P_{grav} .

A expressão para E_{mat} mostra que a energia cinética cresce quanto menor o raio R da estrela: ela tem portanto o efeito de tentar expandir a estrela quando esta se contrai. A energia gravitacional da massa total

¹ A exemplo de um metal, temos neste caso um *background* de N cargas positivas e um gás de N elétrons, onde interações elétricas não desempenham um papel relevante.

M é dada por

$$E_{grav} \approx -\frac{GM^2}{R^2} \quad (12.30)$$

e tem por efeito contrair a estrela. A condição de equilíbrio é que

$$E(R) = E_{grav}(R) + E_{mat}(R) = \text{mínimo} \quad (12.31)$$

Vamos analisar os casos relativístico e não relativístico:

1. Elétrons não relativísticos implicam que $E_{grav} \propto -1/R$ e $E_{mat} \propto 1/R^2$. Pela figura ao lado vemos que há um mínimo de energia e neste caso o equilíbrio corresponde a uma anã-branca.
2. Com o aumento da massa M o mínimo se desloca para valores de R menores. Com isto, devido ao princípio da incerteza, há um aumento do momento eletrônico e o elétron passa a ser relativístico. Nesta situação, quando $p \gg m_e c$ existe, oposto à energia atrativa $E_{grav} \approx -GM^2/R$, uma energia repulsiva $E_{mat} = \frac{N^{4/3}\hbar c}{R}$. Para que não haja um colapso é necessário que

$$N^{4/3}\hbar c > GM^2 \quad (12.32)$$

Porém N está relacionado à massa M via $M \approx Nm_n$ onde m_n é a massa do núcleon. Isto significa na expressão acima que podemos escrevê-la como

$$\frac{M^{4/3}}{m_n^{4/3}}\hbar c > GM^2 \rightarrow M < \frac{1}{m_n^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad (12.33)$$

Este resultado significa que o critério de estabilidade para uma anã-branca é que sua massa seja abaixo do valor crítico M_C

$$M_C = m_n \left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2} \right)^{3/2} \approx 1.8 M_\odot \quad (12.34)$$

(Massa limite de Chandrasekhar)

Para massas acima deste valor a contração ganha da pressão de Fermi e não temos uma anã-branca. Este massa é a famosa *massa limite de Chandrasekhar*². Nesta expressão $\hbar c / Gm_n^2 \sim 10^{40}$ é a razão entre a interação forte e a interação gravitacional. É no mínimo admirável que a massa limite de Chandrasekhar é determinada em termos de constantes do mundo microscópico \hbar e m_n e uma constante gravitacional G . Na verdade, como veremos mais adiante, levando em conta os fatores numéricos, obtém-se um valor mais preciso de $M_C \approx 1.2 \cdots 1.3 M_\odot$.

Este resultado nos mostra que anãs-brancas tem uma massa da ordem da massa do nosso Sol. A pergunta que podemos nos fazer agora é

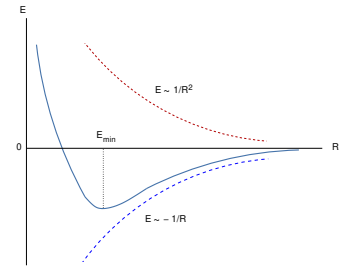


Figura 12.1: Dependência da energia $E = E_{grav} + E_{mat}$ de uma anã-branca para elétrons não relativísticos em função do raio R da estrela.

² Este trabalho foi publicado por Subrahmanyan Chandrasekhar (1910–1995) em 1930. Porém seus resultados só foram aceitos na década de 50 e em 1983 ele recebeu o prêmio Nobel por seu trabalho. Ele era sobrinho de C.V. Raman (1888 – 1970), prêmio Nobel em 1930 pela descoberta do efeito que leva seu nome.

até que ponto o campo gravitacional de uma anã-branca justifique que consideremos os efeitos relativísticos da métrica. Como deduzimos anteriormente, temos que considerar a relação entre o raio da estrela R e seu raio de Schwarzschild r_S , que mostramos ser da ordem de

$$\frac{r_S}{R} \sim \frac{P}{\rho c^2} \quad (12.35)$$

A pressão de matéria é da ordem de $P \sim E_{mat}/V$. O momento dos elétrons é relativístico $p \sim m_e c$ e $E_{mat} \sim N m_e c^2$. Para $\rho \sim \rho_c \sim (N/V)m_n$ obtemos

$$\frac{r_S}{R} \sim \frac{P}{\rho c^2} \sim \frac{m_e}{m_n} \approx \frac{1}{2000} \quad (12.36)$$

isto é, r_S para uma anã-branca é 3 ordens de grandeza menor que o raio da estrela. Uma anã-branca com a massa do Sol teria um raio de aproximadamente

$$R \sim 2000 r_{S,\odot} = 6000 \text{ km} \approx 10^{-2} R_\odot \quad (12.37)$$

A temperatura da superfície de uma anã-branca pode ser próxima da temperatura do Sol e por isso ela nos parece branca. Porém, sendo $R \approx 10^{-2} R_\odot$ sua intensidade é 10^{-4} vezes a intensidade do Sol.

12.2.3 Estrelas de Nêutrons

Quando temos uma estrela com massa $M > M_C$, ou seja, com massa superior à massa crítica de Chandrasekhar, a pressão da matéria não é suficiente para se contrapor à gravidade e a estrela se contrai. Esta contração leva os elétrons ao limite relativístico e quando a energia cinética

$$\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2} - m_e c^2 \quad (12.38)$$

atinge um valor de aproximadamente $1.5 m_e c^2$, a reação

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e \quad (12.39)$$

ocorre. Uma vez que há um número de elétrons igual ao número de prótons, há a possibilidade de todas as partículas elementares se tornarem nêutrons. Como os nêutrons também são férmions, vamos tratá-los por simplicidade como sendo um gás de Fermi. O equilíbrio de uma estrela de nêutrons se dá pelo equilíbrio entre a pressão gravitacional e a pressão cinética do gás. Os resultados são análogos ao que usamos para o tratamento das anãs-brancas, onde apenas substituímos a massa do elétron m_e pela massa do nêutron m_n . A densidade característica de uma estrela deste tipo vale

$$\rho \sim m_n \frac{N}{V} \sim \frac{m_n}{\hbar/m_n c^3} \sim 10^{20} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (12.40)$$

A título de comparação, anãs-brancas tem uma densidade da ordem de 10^{10} kg/m^3 . Cálculos mais detalhados dão um valor mais preciso da ordem de $\rho \sim 6 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$. Esta densidade é próxima da densidade de um núcleo atômico e podemos assim imaginar uma estrela de nêutrons como sendo uma grande núcleo atômico neutro. É possível calcular também a dimensão de um estrela de nêutrons, mas para isso precisaremos primeiro entender a métrica interna de Schwarzschild para obter a conhecida massa limite de Oppenheimer-Volkoff. O fato que a pressão de Fermi não é capaz de se contrapor à gravidade leva a um colapso gravitacional, que leva a uma explosão e a ejeção de matéria no espaço (supernova). A massa restante $M < M_C$ permanece no centro, como no caso da supernova do ano de 1054 (descrita por astrônomos chineses), onde se observa um estrela de nêutrons no seu centro. No caso da estrela de nêutrons temos uma estimativa

$$\frac{r_S}{R} \sim \frac{P}{\rho c^2} \sim 1 \quad (12.41)$$

Uma estrela de nêutrons de massa $M \sim M_\odot$ tem um raio de aproximadamente 10 km , de modo que $r_S/R \sim 0.3$. Os efeitos relativísticos neste caso são relevantes. Pulsares são exemplos de estrelas de nêutrons.

12.3 Métrica interior de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild das Equações de Einstein

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (12.42)$$

foi obtida para o vácuo, isto é numa região do espaço exterior a uma distribuição esférica de massa. Neste caso as EE se reduzem à $R_{\mu\nu} = 0$ e obtém-se a solução acima. Queremos agora obter uma solução da equação

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right). \quad (12.43)$$

onde $T_{\mu\nu}$ representa a distribuição de massa de uma estrela estática e esférica, isto é, quando nos encontramos *dentro* da distribuição. Partimos da hipótese que a forma da métrica será a mesma, com funções $A(r)$ e $B(r)$ diferentes mas que reproduzam os valores conhecidos quando nos encontramos fora da distribuição. O modelo mais simples de matéria da estrela é o de um gás ideal de pressão P , densidade de massa ρ e um campo de velocidades $u_\mu(x)$. Neste caso, como pudemos ver anteriormente (cap. 7, equação 7.30), o tensor energia-momento vale

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} P \quad (12.44)$$

A conservação de energia e momento implica em um divergente nulo para $T_{\mu\nu}$, isto é

$$T_{\mu\nu}^{\parallel\mu} = 0. \quad (12.45)$$

Estas equações representam um conjunto extra de equações e nada mais são que a versão relativística da equação de Euler (parte espacial) e a equação da continuidade (parte temporal). Resolvê-las ou não é uma questão de conveniência pois elas não são importantes para a solução *formal* das EE. Elas podem ser usadas posteriormente para achar $\rho(r)$, como veremos. Usamos agora as condições de simetria e independência do tempo da distribuição de massa e portanto do tensor de energia-momento. Sendo esférica, tanto $P(r)$ quanto $\rho(r)$ só podem depender da coordenada r . Sendo a distribuição estática, as componentes espaciais da quadrivelocidade devem ser nulas

$$u^i = 0 \quad (12.46)$$

mas não a componente u^0 , que podemos obter diretamente da expressão do módulo da quadrivelocidade $u^{-\mu\nu}$:

$$c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00} (u^0)^2 \quad (12.47)$$

isto é

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{B}} \quad u_0 = c \sqrt{B} \quad (12.48)$$

Com as expressões acima temos

$$(T_{\mu\nu}) = \text{diag} (\rho c^2 B, PA, Pr^2, Pr^2 \sin^2 \theta) \quad (12.49)$$

e

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag} \left(\frac{1}{B}, -\frac{1}{A}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (12.50)$$

e portanto o traço de $(T_{\mu\nu})$ que precisamos nas EE vale

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho c^2 - 3P \quad (12.51)$$

Estes valores de T , $T_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são colocados do lado direito das EE. Do lado esquerdo nada muda em relação à forma das equações no vácuo. Isto significa que podemos tomar a forma de R_{00} , R_{11} e R_{22} já calculadas no capítulo 10 e simplesmente igualar as expressões termo a termo:

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) B$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) A$$

$$R_{22} = -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) r^2$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu. \quad (12.52)$$

A exemplo do caso do vácuo, a solução destas equações é mais simples do que aparentam. Notando que

$$\frac{R_{00}}{2B} + \frac{R_{11}}{2A} + \frac{R_{22}}{r^2} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2A} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho \quad (12.53)$$

e multiplicando a expressão acima por r^2 somos levados à

$$\frac{d}{dr} \frac{r}{A(r)} = 1 - \frac{8\pi G}{c^2}\rho(r)r^2 \quad (12.54)$$

Integrando esta expressão da origem $r = 0$ até um r arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \frac{r}{A(r)} &= \int_0^r dr' \left(1 - \frac{8\pi G}{c^2}\rho(r')r'^2 \right) \\ &= r - \frac{2G}{c^2} \underbrace{\int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho(r')}_{=\mathcal{M}(r)} \\ &= r - \frac{2G}{c^2} \mathcal{M}(r) \end{aligned} \quad (12.55)$$

e portanto

$$A(r) = \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{rc^2} \right]^{-1} \quad (12.56)$$

Notem que se r for exterior à distribuição $\mathcal{M}(r) = M$, a massa total da distribuição, e A se reduz à expressão da métrica exterior de Schwarzschild. Devemos ter agora o cuidado e não achar que, como no caso *exterior*, vale $B(r) = 1/A(r)$. Esta condição só é válida quando resolvemos as equações homogêneas, sem termo de fonte. Com a expressão para $A(r)$ podemos a partir da equação para R_{22} obter uma equação para B . Com alguma álgebra é possível escrever

$$\begin{aligned} \frac{B'}{B} &= \frac{2G}{r^2 c^2} \left[\mathcal{M}(r) + \frac{4\pi r^3 P}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{rc^2} \right]^{-1} \\ &= \frac{d}{dr} \ln B \end{aligned} \quad (12.57)$$

Como limites de integração tomamos r e ∞ e somos assim levados finalmente à

$$B(r) = \exp \left\{ -\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{\mathcal{M}(r') + 4\pi r'^3 P(r')/c^2}{1 - 2G\mathcal{M}(r')/(r'c^2)} \right\} \quad (12.58)$$

Precisamos comprovar se esta solução faz sentido físico. Ela deve nos dar a solução conhecida de $B(r)$ para a métrica exterior. Se estivermos fora da distribuição de massa, temos

$$r > R: \quad \rho = P = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(r) = \mathcal{M}(R) = M \quad (12.59)$$

e neste caso a integral se reduz à

$$B(r) = \exp \left\{ -\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} M \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r'} \right]^{-1} \right\} \quad (r > R) \quad (12.60)$$

A substituição $x = 1 - \frac{2GM}{r'c^2}$ nos dá

$$B(r) = \exp \left\{ -\frac{2G}{c^2} \int_1^x \frac{dx'}{x'} \right\} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (r > R) \quad (12.61)$$

como esperado.

12.4 A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Associada à discussão acima temos uma equação que relaciona, para a métrica de Schwarzschild, a pressão da gravidade com a força gravitacional à exemplo da Equação de Euler clássica

$$\frac{dP_{grav}}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) = -\rho(r) \nabla \Phi \quad (12.62)$$

A equação que nos dá a relação de equilíbrio entre a pressão da matéria e a força gravitacional é a famosa Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) obtida em 1939. Tradicionalmente, os livros adotam outro caminho, por razões históricas. É possível obter a equação para B a partir de uma das Equações de Euler (a primeira delas) que sai da relação para o divergente covariante de $T_{\mu\nu}$, ou seja

$$T^{\mu\nu} ||_{\nu} = T^{\mu\nu} |_{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu}. \quad (12.63)$$

Escrevendo a expressão acima explicitamente para $T^{1\nu} ||_{\nu}$ obtemos, após um pouco de álgebra

$$T^{1\nu} ||_{\nu} = 0 = \frac{B'}{2A} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{c^2}{B} + \frac{P'}{A} \quad (12.64)$$

que se reduz, após a multiplicação por A , à equação

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2P'}{\rho c^2 + P} \quad (12.65)$$

Isso nos dá uma equação para $P(r)$ e utilizando a expressão dada pela equação (12.57) obtemos finalmente

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\rho c^2} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M} c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1} \quad (12.66)$$

Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Esta equação é a versão relativística da equação (12.16). No limite clássico, isto é $P/\rho c^2 \ll 1$, $GM/rc^2 \ll 1$ e $r_S/R \ll 1$ temos que (12.66) \rightarrow (12.16).

12.5 Resumo: o equilíbrio estelar

Com a solução da métrica interior de Schwarzschild temos uma maneira de escrever a curvatura na presença de massa. As novas equações para $B(r)$ e $A(r)$ reduzem-se à forma da métrica exterior para $r > R$ (R é o raio da estrela). Porém, diferentemente da solução exterior, as funções A e B dependem da distribuição de massa $\mathcal{M}(r)$ e $P(r)$. A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff é a equação diferencial para P_{grav} relativístico e tem a forma

$$P'(r) = P'(P(r), \rho(r), \mathcal{M}(r)) \quad (\text{pressão gravitacional}) \quad (12.67)$$

onde

$$\mathcal{M}'(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (\text{definição de } \mathcal{M}) \quad (12.68)$$

Com estas equações temos um total de duas equações diferenciais para os 3 campos P , \mathcal{M} e ρ , necessários para que possamos achar A e B . Para poder resolver as equações necessitamos de mais uma equação: uma *equação de estado* que relaciona a pressão de matéria P_{mat} do gás como função da densidade ρ

$$P(r) = P(\rho(r)) \quad (\text{Equação de estado}) \quad (12.69)$$

Com mais esta equação temos um sistema de 3 equações para 3 incógnitas, uma vez que no equilíbrio vale $P_{mat} = P_{grav}$. Utilizaremos nos exemplos do próximo capítulo a equação de estado politrópica

$$P = K \rho^\gamma \quad (\text{Equação de estado politrópica}) \quad (12.70)$$

onde K e γ são constantes. Diferentes valores de γ modelam diferentes tipos de estrelas. Normalmente não podemos desprezar a temperatura nos nossos problemas, e neste caso costuma-se usar uma equação de estado que leve em conta a temperatura na forma $P(r) = P(\rho(r), T(r))$. Com a introdução de um novo campo $T(r)$ é necessária mais uma equação que relacione este campo adicional aos outros. Normalmente usa-se a chamada equação de estado calórica, que relaciona a energia E do corpo com a massa e a temperatura, *i.e.* $E = E(\rho(r), T(r))$. Com estas equações podemos determinar A e B e com isto a *métrica interior de Schwarzschild*.

Estrelas: modelos estáticos

Estrelas são globos de gás sob ação da própria gravidade e mantidos em equilíbrio pela pressão interna. A pressão interna pode ter várias origens: pressão térmica, que pode ser modelada por uma equação de estado, ou a pressão de degenerescência (pressão de Fermi). Na primeira categoria se encontram a grande maioria das estrelas por nós conhecidas – nossa galáxia possui aproximadamente 10^{11} estrelas deste tipo – e para as quais vale $P = \rho k_B T / m$. As estrelas nas quais domina pressão de Fermi de elétrons (não relativística $P \propto \rho^{5/3}$, relativísticas $P \propto \rho^{4/3}$) são as anãs-brancas. A pressão de Fermi pode ter origem também na degenerescência dos nêutrons, em cujos casos as estrelas são então denominadas estrelas de nêutrons. Consideraremos aqui em maior detalhe os modelos estáticos para estas estrelas.

13.1 Considerações gerais: como proceder

No capítulo anterior partimos da condição de equilíbrio hidrostático (Equação de Euler) da forma

$$\frac{\partial P}{\partial x^\mu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) f_\mu. \quad (13.1)$$

Quando usamos a métrica interior de Schwarzschild esta equação nos leva à famosa equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (eq. 12.66):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\rho c^2}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M} c^2}\right] \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]^{-1}. \quad (13.2)$$

No caso clássico obtemos (eq. 12.16)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (13.3)$$

que sai diretamente da Equação de Euler ou como limite não relativístico da Equação TOV. A estas equações devemos acrescentar uma equação de estado que relacione a pressão à densidade, a chamada equação de estado politrópica (eq. 12.70):

$$P = K \rho^\gamma = K \rho^{1+1/n}. \quad (13.4)$$

Nota: muitos autores preferem escrever a equação politrópica em função de n , motivo pelo qual apresentamos a equação nesta forma. Esta equação não deve ser confundida com os processos politrópicos da Termodinâmica, isto é aqueles para os quais vale $PV^n = \text{constante}$. Na Termodinâmica um processo com $n = 0$ é isobárico; $n = \infty$ isocórico. Se o gás for ideal, $n = 1$ corresponde a um processo isotérmico e $n = c_p/c_v = \gamma$ é o processo isentrópico, onde c_p e c_v são os calores específicos a pressão e volume constantes, respectivamente. Na TRG diferentes valores de n ou γ corresponde a diferentes tipos de estrelas.

Vamos agora considerar as estrelas relativísticas para depois olhar mais cuidadosamente para as estrelas Newtonianas.

13.2 Estrelas relativísticas

Consideremos uma estrela esférica de raio R com uma densidade ρ_0 constante de massa:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \quad (13.5)$$

Fisicamente isto significa que a estrela é constituída por um fluido incompressível (densidade independente da pressão). A densidade constante corresponde a uma equação de estado politrópica com $\gamma \rightarrow \infty$ ($n = 0$). Para a massa \mathcal{M} temos

$$\mathcal{M}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 = M \frac{r^3}{R^3} & (r \leq R) \\ \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 = M & (r > R) \end{cases} \quad (13.6)$$

Substituindo estes valores na equação TOV obtemos para $r \leq R$

$$\frac{P'}{(P + \rho_0 c^2)(P + \rho_0 c^2/3)} = \frac{4\pi G r}{c^4} \left[1 - \frac{8\pi G \rho_0 r^2}{3c^2} \right]^{-1}. \quad (13.7)$$

No lugar da variável r introduzimos a grandeza adimensional $x = \sqrt{8\pi G \rho_0/3c^2} r$. A equação se torna

$$\frac{-2\rho_0 c^2 dP}{(P + \rho_0 c^2)(3P + \rho_0 c^2)} = \frac{xdx}{1 - x^2} \quad (13.8)$$

cuja integração leva à

$$\ln \left(\frac{P + \rho_0 c^2}{3P + \rho_0 c^2} \right) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + \text{const.} \quad (13.9)$$

A constante de integração pode ser definida em $r = R$, onde $P(R) = 0$. Neste caso

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{0 + \rho_0 c^2}{0 + \rho_0 c^2}\right) &= -\frac{1}{2} \ln(1 - x_0^2) + \text{const.} \\ 0 &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{8\pi G \rho_0 R^2}{3c^2}\right) + \text{const.} \\ \text{const.} &= \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{8\pi G \rho_0 R^2}{3c^2}\right)\end{aligned}\quad (13.10)$$

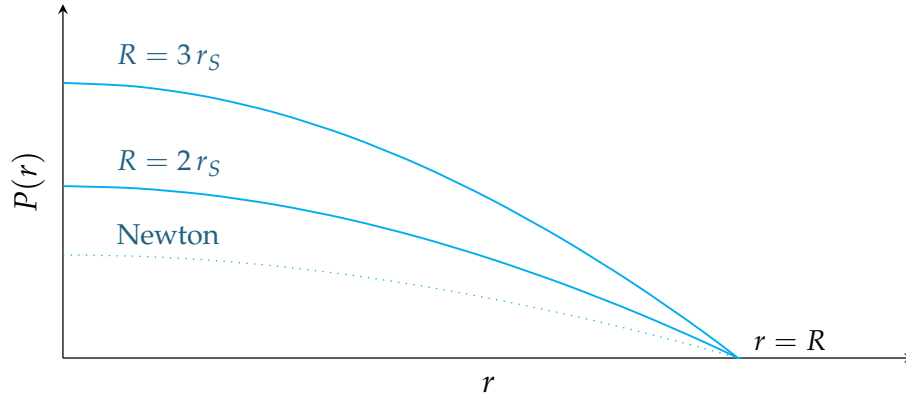
Isto leva finalmente à

$$\frac{P(r) + \rho_0 c^2}{3P(r) + \rho_0 c^2} = \left[\frac{1 - 8\pi G \rho_0 R^2 / (3c^2)}{1 - 8\pi G \rho_0 r^2 / (3c^2)} \right]^{1/2} \quad (r \leq R) \quad (13.11)$$

Podemos escrever esta expressão de uma forma um pouco mais enxuta, lembrando que $4\pi G \rho_0 R^3 / (3c^2) = GM/c^2 = r_S/2$. Com isto obtemos

$$P(r) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}}} \quad (r \leq R) \quad (13.12)$$

Ilustramos abaixo a função $P(r)$ para $R = 2r_S$ e $R = 3r_S$.



Em posse da definição de $\mathcal{M}(r)$ e da expressão analítica para a pressão da gravidade P_{grav} podemos agora obter os valores dos fatores $A(r)$ e $B(r)$ da métrica interior de Schwarzschild:

$$\begin{aligned}A(r) &= \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{rc^2} \right]^{-1} \\ B(r) &= \exp \left\{ -\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{\mathcal{M}(r') + 4\pi r'^3 P(r')/c^2}{1 - 2G\mathcal{M}(r')/(r'c^2)} \right\}\end{aligned}\quad (13.13)$$

que se tornam

$$A(r) = \begin{cases} \left[1 - \frac{r_S r^2}{R^3}\right]^{-1} & (r \leq R) \\ \left[1 - \frac{r_S}{r}\right]^{-1} & (r \geq R) \end{cases} \quad (13.14)$$

e

$$B(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[3 \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}}\right]^2 & (r \leq R) \\ 1 - \frac{r_S}{r} & (r \geq R) \end{cases} \quad (13.15)$$

Discutamos agora a questão da estabilidade.

13.2.1 Estabilidade de estrelas relativísticas

A expressão por nós obtida para $P(r)$ nos permite estabelecer um critério para a estabilidade de estrelas. Quando mais R se aproximada de r_S , maiores são os efeitos relativísticos. Se olharmos para a pressão da gravidade no centro da estrela, temos

$$P(r=0) = P_0 = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - 1}. \quad (13.16)$$

Quando R se aproxima do valor $R = 9/8 r_S$ o valor de P_0 diverge

$$P_0 \xrightarrow{R \rightarrow 9/8 r_S} \infty \quad (13.17)$$

Ou seja, se a estrela for massiva e compacta o suficiente, a pressão da gravitação no seu centro se torna tão grande que a estrela colapsa, pois não existe no universo qualquer tipo de matéria para que o P_{mat} tal que $P \geq P_0$. Portanto, o equilíbrio de uma estrela só é possível se

$$R > \frac{9}{8} r_S \quad \text{Critério de Estabilidade} \quad (13.18)$$

Uma vez que r_S é uma função da massa M da estrela, este resultado pode ser interpretado de duas maneiras:

- i. para um R fixo, ela define o limite superior de massa M para que a estrela seja estável;
- ii. para um M fixo, ela define o limite inferior do raio R para que a estrela seja estável.

Isto fica mais fácil de ver se reescrevermos o critério de estabilidade na forma equação diferencial tem

$$\frac{G}{c^2} \frac{M}{R} < \frac{4}{9} \quad (13.19)$$

Na verdade é possível demonstrar matematicamente que este resultado *independe da equação de estado escolhida* ¹. Este resultado é diferente daquele da equação (12.18) que representa a pressão no centro da estrela clássica. No caso clássico P_0 nunca diverge. Isto porém não significa que a estrela não possa mudar: a pressão pode se tornar tão grande que a matéria colapsa, aumentando a energia dos elétrons e criando um gás de Fermi. Esta pressão de Fermi leva a um novo equilíbrio na forma de uma anã-branca e, se a pressão é grande o suficiente, a uma estrela de nêutrons. Quem define o tipo de estrela que obtemos no final é a massa da estrela original. Devemos porém distinguir esta instabilidade clássica daquela quando $R \rightarrow (9/8)r_S$, que não está de modo algum relacionada à compressibilidade da matéria mas sim ao efeito relativístico da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Quando a pressão é muito grande ($P > \rho c^2$), ficamos na equação de TOV com $dP/dr \propto -P^2$ o que representa um aumento auto-sustentado da pressão gravitacional em direção ao centro da distribuição. Esta divergência é independente do tipo de matéria da qual a estrela é composta. São as equações de campo de Einstein que nos levam portanto a uma divergência da pressão gravitacional no centro da estrela. Como consequência, a estrela sofre um **colapso gravitacional**. O colapso em si é um processo dinâmico e para descrevê-lo precisamos de uma métrica dependente do tempo. Veremos este tipo de métrica com mais detalhes no próximo capítulo, quando estudarmos o colapso gravitacional.

¹ Esta demonstração, que é relativamente simples, pode ser encontrada no livro de Weinberg, cap. 11, seção 6, pp 332 - 334.

13.3 Estrelas newtonianas

O limite não relativístico da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff é aquele para os quais

$$\frac{P}{\rho_0 c^2} \ll 1, \quad \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M} c^2} \ll 1, \quad \frac{2GM}{r c^2} \ll 1 \quad (13.20)$$

A equação se reduz neste limite à

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (13.21)$$

Uma vez que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\rho)$, a estratégia é escrevermos esta equação diferencial numa forma que tenhamos apenas P e ρ dos dois lados. Feito isto, uma vez que $P_{mat} = P_{grav}$, podemos usar uma equação de estado que ligue P a ρ e ficamos com uma equação diferencial em uma só função. Para fazer isto multipliquemos os dois lados da igualdade por r^2/ρ e derivemos em r :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{d\mathcal{M}}{dr}. \quad (13.22)$$

Lembrando que $dM/dr = 4\pi r^2 \rho$, podemos substituir esta expressão na equação acima e obter

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \quad (13.23)$$

Usemos agora a equação de estado politrópica

$$P = K\rho^\gamma \quad (13.24)$$

que, substituída na expressão acima nos dá:

$$\gamma K \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \quad (13.25)$$

Queremos achar uma solução desta equação em ρ que seja finita em $r = 0$

$$\rho(0) = \rho_0 < \infty \quad (13.26)$$

Esta equação não tem uma solução trivial. Vamos escrevê-la de uma forma mais conveniente introduzindo uma variável adimensional x

$$x = \left[\frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma} \right]^{1/2} \rho_0^{1-\gamma/2} r \quad (13.27)$$

e uma função adimensional $\Theta(x)$:

$$\Theta(x) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (13.28)$$

Com estas substituições nossa equação diferencial se torna

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) + \Theta^n = 0, \quad n = \frac{1}{\gamma-1}. \quad (13.29)$$

Com as condições de contorno

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta'(0) = 0 \quad (13.30)$$

A primeira condição é trivial, pela definição da função de Lane-Emden. Já a segunda condição vem do fato que para $r \rightarrow 0$ nossa equação original pode ser escrita como

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) \propto r^2 \quad e \quad \rho' \propto r \quad (13.31)$$

Isto implica que

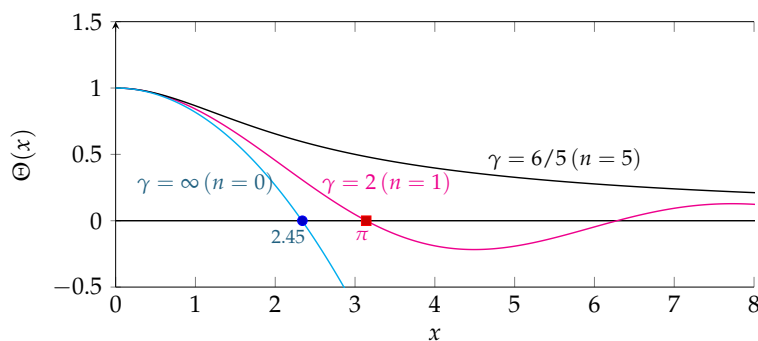
$$\rho'(0) = 0. \quad (13.32)$$

Esta condição se traduz na segunda condição de contorno sobre $\Theta(x)$. A equação diferencial à que chegamos define o conjunto de funções $\Theta(x)$ chamadas de funções de Lane-Emden de índice n . A equação

diferencial tem solução exata para três valores de n , e portanto a função de Lane-Emden tem uma forma fechada:

$$\begin{aligned}\Theta &= 1 - \frac{x^2}{6} && \text{para } n = 0, \gamma = \infty \\ \Theta &= \frac{\sin x}{x} && \text{para } n = 1, \gamma = 2 \\ \Theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} && \text{para } n = 5, \gamma = \frac{6}{5}\end{aligned}\quad (13.33)$$

Para estes valores, a função de Lane-Emden é ilustrada abaixo.



Para $x \ll 1$ é possível escrever a função de Lane-Emden na forma de uma série de potências

$$\Theta(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 - \frac{8n^2 - 5n}{15120}x^6 + \dots \quad (13.34)$$

Soluções para valores de γ (n) diferentes daqueles em (13.33) são obtidas numericamente. Ilustramos abaixo algumas destas soluções junto com as soluções exatas. Uma coisa importante a notar nestas funções é que para $\gamma > 6/5$ ($n < 5$), a função de Lane-Emden tem um ou mais zeros. Pela definição, se no primeiro zero em x_1 temos

$$\Theta(x_1) = \left[\frac{\rho(x_1)}{\rho_0} \right]^{\gamma-1} = 0 \rightarrow \rho(x_1) = 0 \quad (13.35)$$

isto é a densidade se torna zero. O ponto x_1 para o qual $\rho = 0$ representa o limite da estrela, ou seja, seu raio:

$$\begin{aligned}x_1 &= \left[\frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma} \right]^{1/2} \rho_0^{1-\gamma/2} R \\ \rightarrow R &= \left[\frac{K\gamma 4}{\pi G(\gamma-1)} \right]^{1/2} \rho_0^{\frac{\gamma}{2}-1} x_1\end{aligned}\quad (13.36)$$

Da definição $M = \int 4\pi r'^2 dr' \rho(r')$ segue

$$M = 4\pi \rho_0^{(3\gamma-4)/2} \left[\frac{K\gamma 4}{\pi G(\gamma-1)} \right]^{3/2} \int_0^{x_1} dx x^2 \Theta^n \quad (13.37)$$

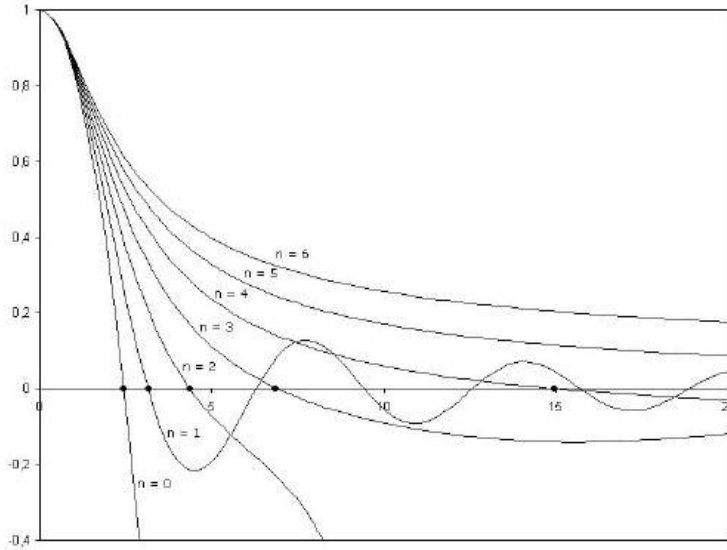


Figura 13.1: Gráficos para diferentes valores de n da função de Lane-Emden. Os valores plotados são, da esquerda para a direita: $\gamma = \infty$; $\gamma = 2$; $\gamma = 3/2$; $\gamma = 4/3$; $\gamma = 5/4$; $\gamma = 6/5$ e $\gamma = 7/6$. Fonte: wikipedia.

como a equação diferencial que define a função de Lane-Emden

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) + \Theta^n = 0, \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (13.38)$$

pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -x^2 \Theta^n \quad (13.39)$$

podemos substituir o integrando pelo lado direito da equação acima e chegar a um resultado final para a massa da estrela

$$M = 4\pi \rho_0^{(3\gamma-4)/2} \left[\frac{K\gamma 4}{\pi G(\gamma-1)} \right]^{3/2} x_1^2 |\Theta'(x_1)| \quad (13.40)$$

Este resultado depende obviamente da equação de estado $P = K\rho^\gamma$ escolhida e portanto os valores de x_1 e $\Theta'(x_1)$. Para valores fixos de K e γ obtemos assim, tanto para o raio R como para a massa M , uma função unívoca da densidade ρ_0 da forma

$$M = \text{const} \cdot \rho_0^{(3\gamma-4)/2} \quad (13.41)$$

$$R = \text{const} \cdot \rho_0^{\frac{\gamma}{2}-1} \quad (13.42)$$

Às anãs-brancas e estrelas de nêutrons correspondem os expoentes $\gamma = 5/3$ ($n = 3/2$) e $\gamma = 4/3$ ($n = 3$) respectivamente. Uma estrela de matéria incompressível corresponde a uma equação de estado politrópica com $\gamma = \infty$. Nestes casos, a função $\Theta(x)$ é idêntica à densidade a menos de um fator de escala.

13.4 Estabilidade

Nós encontramos acima as condições de equilíbrio para estrelas Newtonianas descritas por equações politrópicas. Porém, nada foi discutido sobre a estabilidade de tais soluções. Podemos com um argumento simples mostrar que $\gamma = 4/3$ representa o limite entre estabilidade e instabilidade.

As soluções das equações tem um parâmetro de escala, R , que é o raio da estrela. Por equilíbrio queremos dizer que qualquer variação $\delta R = R - R_0$ do raio de equilíbrio R_0 leva a uma força restauradora. Podemos entender isto em termos do balanço entre a energia gravitacional E_{grav} e a energia interna da matéria E . Considerando apenas termos de primeira ordem na energia temos

$$E_{grav} \approx -\frac{GM^2}{R} \quad e \quad E_{mat} \approx PV = K\rho^\gamma V \propto \frac{1}{R^{3(\gamma-1)}} \quad (13.43)$$

Disto segue que a energia total da estrela vale

$$E(R) = E_{grav} + E_{mat} = -\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^{3(\gamma-1)}} \quad (13.44)$$

onde C_1 e C_2 são constantes numéricas positivas. Este resultado físico nos diz que a energia é composta de uma parte atrativa proporcional à $1/R$ e uma parte repulsiva do tipo $1/R^{3(\gamma-1)}$. Esta equação pode ser analisada da mesma maneira que analisamos o potencial efetivo

$$V_{eff} \propto -\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^2} \quad (13.45)$$

da mecânica clássica. A expressão por nós discutida tem um mínimo desde que $\gamma > 4/3$. Para $\gamma = 4/3$ um estudo mais detalhado se faz necessário. De modo geral podemos dizer que

$$\gamma \geq \frac{4}{3} \longleftrightarrow n \leq 3 \quad \text{critério de estabilidade,} \quad (13.46)$$

é o critério que define a estabilidade de estrelas clássicas (Newtonianas) cuja matéria é descrita por uma equação de estado politrópica $P = K\rho^\gamma$. A estabilidade pode ser mais detalhadamente estudada levando-se em conta modelos mais precisos para a E , como veremos no capítulo a seguir.

Anãs Brancas e Estrelas de Nêutrons

O modelo do gás de Fermi serve de modelo às chamadas anãs-brancas. Nelas, o pressão do gás degenerado se contrapõe à atração gravitacional e o equilíbrio é atingido. Porém, quando a massa M da estrela é maior que chamada massa limite de Chandrasekhar M_C , a pressão do gás de elétrons não é suficiente para vencer a gravidade e a estrela colapsa: obtemos então uma estrela de neutrons.

14.1 Anãs brancas

Todas as estrelas evoluem ao longo de sua existência. Uma vez gasto o “combustível” nuclear, a estrela esfria por irradiação, quando então a pressão térmica não é capaz de manter a estrela em equilíbrio e a pressão gravitacional se torna tão grande – dependendo da massa da estrela – que a energia do elétrons aumenta a ponto de todos saírem de seus orbitais: resta um gás de Fermi de elétrons e os núcleos (para massas pequenas o suficiente a eletrosfera é capaz de suportar a pressão gravitacional). O gás de elétrons e núcleons formam uma mistura neutra na escala da distância média entre partículas, o que nos permite desprezar as interações eletromagnéticas. Neste caso, podemos tratar o gás de Fermi como sendo ideal, isto é, não interagente.

Tomemos por simplicidade a temperatura do gás como sendo $T = 0$, isto é, um gás de Fermi degenerado. Os elétrons livres têm o volume total V da estrela e quando menor este volume, maior se torna a pressão cinética por eles exercida. Suponhamos que V e N , o número total de elétrons, é conhecido. No espaço de fase de volume $d^3 r d^3 p$ há um estado por volume $(2\pi\hbar)^3$, que pode ser ocupado por 2 elétrons (spin para cima e spin para baixo). Para $T = 0$ todos os elétrons de encontram no estado de menor energia, isto é com um momento $|\mathbf{p}| \leq p_F$. O número de estado com energia menor que o momento de Fermi p_F vale

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_V d^3 r \int_{p \leq p_F} d^3 p \sum_{spin} 1 = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 \quad (14.1)$$

Desta expressão segue a relação entre o momento de Fermi p_F e a densidade de elétrons $n_e = N/V$

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{\frac{1}{3}} \quad (14.2)$$

A energia de uma partícula com momento \mathbf{p} vale

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (14.3)$$

onde $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ é a massa de repouso do elétrons. A energia do gás de elétrons vale portanto

$$\begin{aligned} E_{mat} &= 2 \sum_{p \leq p_F} \epsilon(\mathbf{p}) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F) \end{aligned} \quad (14.4)$$

onde introduzimos uma variável x adimensional

$$x = \frac{p}{m_e c} \quad \text{com} \quad x_F = \frac{p_F}{m_e c} \quad (14.5)$$

e a função

$$f(x_F) = \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \dots\right) & (x_F \ll 1) \\ \frac{1}{4} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} + \dots\right) & (x_F \gg 1) \end{cases} \quad (14.6)$$

A primeira expressão corresponde à elétrons não relativísticos, a segunda à elétrons relativísticos.

A expressão (14.4) nada mais é que a generalização relativística da equação por nós conhecida da Mecânica Estatística para a energia de um gás de Fermi degenerado. Lembrando que no limite de baixas velocidades

$$E = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} = m_e c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} \quad (14.7)$$

temos que, para $p \ll mc$ podemos expandir a raiz quadrada e escrever

$$E \approx m_e c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_e^2 c^2}\right) = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e} \quad (14.8)$$

O primeiro termo $m_e c^2 = \epsilon_0$ é a energia de repouso do elétron. Inte-

grando (14.4) com a aproximação não relativística temos

$$\begin{aligned}
 E_{mat} &= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \left[\epsilon_0 \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 + \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \frac{p^2}{2m_e} \right] \\
 &= \epsilon_0 \left[\underbrace{\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp}_{=N \text{ (eq. (14.1))}} \right] + \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \frac{p^2}{2m_e} \\
 &= N\epsilon_0 + \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \right) 4\pi k^2 dk.
 \end{aligned}$$

Na última passagem usamos a relação $p = \hbar k$ para escrever a segunda integral no espaço recíproco como comumente vemos nos livros. O primeiro termo é a energia de repouso total dos elétrons, termo este que não contribui para a pressão $P = -\partial E/\partial V$. O segundo termo é a energia de um gás de Fermi degenerado que, após a integração, reproduz o resultado conhecido $E = (3/5)N\epsilon_F$ onde ϵ_F é a energia de Fermi $\epsilon_F = p_F^2/2m_e = \hbar^2 k_F^2/2m_e$ com p_F definido em (14.2).

A pressão P do gás segue da relação termodinâmica $dE = TdS - PV$. Sendo $T = 0$ e $E = E_{mat}$ temos

$$P = -\frac{\partial E_{mat}}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{x_F^3}{3} \sqrt{1 + x_F^2} - f(x_F) \right) \quad (14.9)$$

on na última passagem usamos

$$\frac{dx_F}{dV} = -\frac{x_F}{3V} \quad (14.10)$$

que segue da relação (14.2). A expressão por nós obtida relaciona a pressão P com a densidade n_e dos elétrons. Podemos também usar esta expressão para obter uma relação entre P e a densidade de massa ρ total da matéria, pois vale

$$\rho = \sigma n_e m_n + \text{massa dos elétrons} \quad (14.11)$$

onde m_n é a massa do núcleons e σ um fator que dá quantos núcleons há, em média, para cada um dos elétrons. A massa eletrônica é desprezível e por isso ela pode ser desconsiderada na expressão acima. No caso de anã-brancas, compostas basicamente por hélio e carbono, vale

$$\sigma = \frac{A}{Z} = 2 \quad \text{He ou C} \quad (14.12)$$

¹ Há obviamente ciclos de fusão para elementos mais pesados, até ^{56}Fe (com $\sigma \approx 2.15$) mas estas fusões só ocorrem em estrelas de massas grandes que nunca evoluem para anãs-brancas. Normalmente, uma anã-branca em estágio final é composta de Hélio e/ou Carbono. Dependendo da anã-branca, ela pode ser formada por um núcleo de C

¹ Para o Hélio temos $Z = 2, A = 4$. Já para o Carbono vale $Z = 6, A = 12$.

com mistura de O e uma casca de He com alguns restos de H . de (14.2), (14.5) e (14.12) segue

$$x_F = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\sigma m_n} \right)^{1/3} \quad (14.13)$$

Para anãs-brancas típicas o valor de $x_F = p_F/m_e c$ é $x_F \sim 1$, como veremos mais detalhadamente abaixo. Isto leva, na expressão acima, a uma densidade característica ρ_{car} para as anãs brancas:

$$\rho_{car} = \frac{\sigma m_n}{3\pi^2 \hbar^3} (m_e c)^3 \quad (14.14)$$

Podemos agora entender o que ocorre com os limites $x_F \ll 1$ e $x_F \gg 1$. Como $x_f \propto \rho^{1/3}$, vale

$$x_F \ll 1 \rightarrow \rho \ll \rho_{car} \quad x_F \gg 1 \rightarrow \rho \gg \rho_{car} \quad (14.15)$$

Usando estes resultados na expressão para a pressão (14.9) obtemos finalmente

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{15} x_F^5 \\ \frac{1}{12} x_F^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C_1 \rho^{5/3} \\ C_2 \rho^{4/3} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\rho \ll \rho_{car}) \\ (\rho \gg \rho_{car}) \end{array} \quad (14.16)$$

onde

$$C_1 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma m_n} \right)^{5/3} \quad C_2 = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma m_n} \right)^{4/3} \quad (14.17)$$

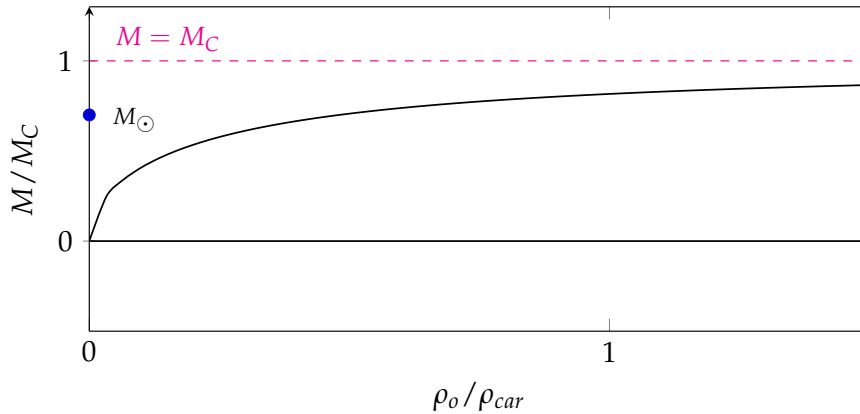
Este resultado significa que para baixas ou altas densidades de matéria somos levados a uma equação de estado politrópica com $\gamma = 5/3$ e $\gamma = 4/3$ respectivamente. Obtivemos no capítulo anterior as equações que relacionam o raio R e a massa M da estrela para equações de estado politrópicas para um γ arbitrário: as equações (13.36) e (13.37). Considerando os valores numéricos da variável x_1 e da derivada da função de Lane-Emden $\Theta'(x_1)$ para estes γ , obtemos uma expressão para o raio e massa da anã branca como função da densidade ρ_o no seu centro:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2.79}{\sigma^2} \left(\frac{\rho_o}{\rho_{car}} \right)^{1/2} M_{\odot} \\ \frac{5.87}{\sigma^2} M_{\odot} = M_C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\rho_o \ll \rho_{car}) \\ (\rho_o \gg \rho_{car}) \end{array} \quad (14.18)$$

e

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2.00}{\sigma} \left(\frac{\rho_{car}}{\rho_o} \right)^{1/6} 10^4 km \\ \frac{5.33}{\sigma} \left(\frac{\rho_{car}}{\rho_o} \right)^{1/3} 10^4 km \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\rho_o \ll \rho_{car}) \\ (\rho_o \gg \rho_{car}) \end{array} \quad (14.19)$$

Podemos ver no gráfico abaixo como M varia como função da densidade da anã-branca.



A massa M_C que aparece nestas equações é a famosa massa limite de Chandrasekhar, um resultado obtido em 1930 por S. Chandrasekhar quando tinha ainda 19 anos de idade. Na realidade este resultado havia sido obtido pelo astrofísico inglês Edmund C. Stoner em 1929 – para o caso de uma densidade ρ constante – e generalizado para o caso relativístico pelo astrofísico russo-estoniano Wilhelm R.K. Anderson no mesmo ano ². Para uma estrela composta de Hélio ou Carbono obtemos

$$M_C = 1.47M_\odot \quad (14.20)$$

² Nos últimos anos os historiadores da ciência tem dado mais destaque aos trabalhos de Stoner e Anderson, que pavimentaram o caminho para o trabalho de Chandrasekhar. Os artigos são: E.C. Stoner, *The limiting density of white dwarfs*, *Philosophical Mag. Series 7/41* (1929), pp. 63-70; W. Anderson, *Über die Grenz-dichte der Materie und der Energie*, *Zeitschrift für Physik 56/11-12* (1929), pp. 851-856.

14.2 A física

Quando $M \rightarrow M_C$ temos que $\rho_o \gg \rho_{char}$ e com isto $\gamma = 4/3$. Como pudemos estimar baseado em argumentos de energia, neste valor de γ temos um equilíbrio instável: para $M \rightarrow M_C$ temos $\rho_o \rightarrow \infty$ e $P_0 \rightarrow \infty$. Isso ocorre pois antes de atingir este limite as reações $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ começam a ocorrer. Ocorre uma conseqüente diminuição da pressão de Fermi eletrônica e a gravidade faz com que a estrela colapse.

Para anãs brancas num sistema binário pode ocorrer que parte da massa de uma estrela é sugada pela anã branca de tal modo que ela se aproxima de M_C e então ocorre o colapso seguido da explosão: temos uma supernova. Estas considerações explicam o motivo pelo qual $M \sim M_\odot$ ($x_F \sim 1$ como discutido acima) são massas características de anãs brancas. Se a massa for muito pequena, a estrela não chega a completar os ciclos de fusão. Se a massa é muito grande, ocorre o colapso. Por isto ρ_{car} foi por nós chamada de *densidade característica* de

uma anã branca, que é em torno de 2 toneladas por cm^3 :

$$\rho_{car} = \frac{\sigma m_n}{3\pi^2 \hbar^3} (m_e c)^3 \approx 2 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(densidade típica de uma anã branca)

Uma anã branca com esta massa tem um raio $R \approx 10^4$ km. A intensidade absoluta dos efeitos relativísticos é portanto

$$\frac{2|\Phi|}{c^2} = \frac{2GM_\odot}{Rc^2} = \frac{r_{S,\odot}}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

(campo gravitacional de uma anã branca)

o que justifica o uso do limite não relativístico da Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

É interessante notarmos pelo título do artigo de Stoner citado acima o termo *white dwarf* já era usado, pois estas estrelas já eram há tempos conhecidas. Com a ajuda da Lei de Planck para a radiação do corpo negro podemos determinar a temperatura da superfície de uma estrela pelo seu espectro. Poderíamos dizer que o espectro das anãs brancas (e daí seu nome) pode ser classificado como uma estrela branca ou branco-azulada, o que implica uma temperatura de superfície da ordem daquela do sol $T_\odot \approx 6000$ K ou até mais alta em alguns casos³. Embora tenham um temperatura próxima daquele de nosso Sol, a intensidade e seu brilho é uma fração da intensidade daquele. Segundo a Lei de Stefan-Boltzmann, a luminosidade L é proporcional à superfície irradiante multiplicada pela quarta potência da temperatura, isto é

$$L = \text{const.} \cdot R^2 T^4 \quad (14.25)$$

Substituindo os valores conhecidos do Sol podemos escrever

$$R = \left(\frac{T_\odot}{T} \right)^2 \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{1/2} R_\odot \quad (14.26)$$

e portanto o raio R de uma estrela pode ser determinado pela valor de sua luminosidade absoluta L e aus temperatura T . Para uma anã branca de, digamos $L = 10^{-4} L_\odot$ e $T = T_\odot$ segue da equação acima que $R = 10^{-2} R_\odot \approx 10^4$ km. Portanto, as leis da Física conhecidas antes do advento da Relatividade Geral de Einstein já prediziam a existência de tais estrelas, motivo pelo qual em função de seu raio foram batizadas de *anãs* e pela distribuição espectral de *brancas*. Para

³ Isto parece contradizer o fato que tratamos o gás de Fermi como sendo degenerado, isto é $T \approx 0$. No entanto a degenerescência significa $k_B T \ll \epsilon_F$. Para $\rho \approx \rho_{car}$ temos $\epsilon_F \sim m_e c^2$, isto é $\epsilon_F \sim 0.5$ MeV e $k_B T \sim \text{eV}$.

a análise que fizemos do equilíbrio a temperatura da estrela não é relevante, uma vez que sua contribuição à pressão, comparada àquela do gás de Fermi, é muito pequena. Sem a captura de matéria exterior, a anã branca se resfria até se tornar uma anã negra (não visível).

Nosso Sol poderá evoluir ao final de sua vida para uma anã branca ou negra. Porém a evolução é mais complicada do que a análise aqui descrita. A evolução pode ser descrita resumidamente da seguinte forma: após a queima do hidrogênio na região central da estrela pode continuar havendo fusão de H numa “casca” em torno do centro. Esta fusão leva a um aquecimento e conseqüente expansão desta casca, um processo que dá o origem a uma *gigante vermelha*. A região central não é mais visível para quem se encontra do lado de fora. Esta casca pode se expandir tanto que ela é ejetada para o espaço, deixando novamente um núcleo visível. Relativamente ao tempo de vida das estrelas, este processo de ejeção da casca externa dura aproximadamente 20 mil anos ($2 \cdot 10^4$), um tempo curto considerando que as estrelas, dependendo de sua massa, tem um tempo de fusão de hidrogênio de 10^6 (um milhão) de anos a 10^{11} (100 bilhões) de anos. O núcleo restante forma a anã branca.

14.3 Estrelas de nêutrons - Pulsares

A possibilidade da existência de uma estrela de nêutrons foi aventada pelo físico russo L. D. Landau tão logo os nêutrons foram descobertos em 1932, embora o cálculo se deva poucos anos depois, em 1939, a Oppenheimer e Volkoff, que calcular o limite superior de massa.

Durante o decaimento β , na reação $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ uma energia $\Delta E = (m_n - m_p - m_e) c^2$ é liberada. Se na matéria altamente comprimida do gás de Fermi a ϵ_F dos elétrons passa de $\Delta E \approx 1.5 m_e c^2$, aqueles elétrons que se encontram no limiar energético de ϵ_F participar da reação



pois esta se torna energeticamente favorável. Com o aumento da densidade aumenta a energia dos elétrons. Uma vez que a estrela é eletricamente neutra, há um próton para cada elétron e, se a densidade for alta o suficiente, a reação nuclear acima leva a uma transformação dos prótons em nêutrons. Através deste processo surge uma estrela composta unicamente de nêutrons, a chamada *estrela de nêutrons*. O processo físico de como isto ocorre é basicamente este: quando a estrela tem uma massa suficientemente grande, isto é $M \gg M_\odot$, o ciclo de fusão se esvai pelo queima de todo o combustível nuclear, o que causa um esfriamento da estrela e conseqüente diminuição da pressão térmica P_{ter} . A pressão de Fermi P_{mat} dos elétrons passa a dominar mas se a massa da estrela é muito grande, ela não é capaz de sustentar a

força da gravidade. A estrela continua a ser comprimida e no centro da estrela a reação inversa do decaimento β passa a ocorrer. Com o desaparecimento dos elétrons a pressão de Fermi se esvai e a estrela colapsa. O processo do colapso é difícil de ser modelado por ser um processo dinâmico que envolve grandes energias e pressões. Aqui, restringir-nos-emos a um modelo simples do equilíbrio destas estrelas.

O equilíbrio em uma estrela de nêutrons é mantido pela pressão de Fermi dos nêutrons. Se desprezarmos a interação forte entre eles, podemos criar um modelo bem simples que difere do modelo da anã branca nos seguintes pontos:

- i. a densidade de massa ρ é a de um gás de Fermi e não proporcional a ele simplesmente;
- ii. se o gás de Fermi é relativístico, também tratamos o campo gravitacional relativisticamente.

Da discussão da anã branca tomamos as fórmulas substituindo m_e por m_n . Além disto, o valor de σ (número de núcleons por elétron) é igual a 1 e não mais a 2. Deste modo a densidade característica ρ_{car} se torna (cf. eq. 14.1)

$$\rho_{car} = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (14.28)$$

ou seja, a relação (14.1) entre número de partícula e momento de Fermi permanece inalterada. A energia de um gás de nêutrons é portanto

$$\begin{aligned} E_{mat} &= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{m_n^2 c^4 + p^2 c^2} \\ &= \frac{m_n^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F) \end{aligned} \quad (14.29)$$

onde $x_F = p_F / (m_n c)$ e $f(x_F)$ é a mesma função definida em (14.6). A densidade de massa dos nêutrons é dada pela densidade de energia

$$\rho = \frac{E_{mat}}{Vc^2} = 3\rho_{car} f(x_F) \quad (14.30)$$

Se considerarmos os limites $x_F \ll 1$ e $x_F \gg 1$ obtemos como no caso anterior uma equação de estado politrópica $P = K\rho^\gamma$ com $\gamma = 5/3$ e $\gamma = 4/3$ respectivamente. Porém, é importante notar que no caso das anãs brancas usamos a abordagem de estrelas Newtonianas pois o efeito da métrica de Schwarzschild é da ordem de 10^{-4} em valor absoluto comparado à gravidade clássica. Para estrelas de nêutrons esta aproximação só é válida para $x_F \ll 1$, isto é $\rho \ll \rho_{car}$. Neste caso temos a equação de estado politrópica com coeficiente K

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad K = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left(\frac{3\pi^2}{m_n} \right)^{5/3} \quad (14.31)$$

de onde obtemos

$$M = 2.7 \left(\frac{\rho_o}{\rho_{car}} \right)^{1/2} M_{\odot} \quad (\rho_o \ll \rho_{car}) \quad (14.32)$$

$$R = 11 \left(\frac{\rho_{car}}{\rho_o} \right)^{1/6} km \quad (\rho_o \ll \rho_{car}) \quad (14.33)$$

Para $\rho \gg \rho_{car}$ surge um limite superior M_C para a mssa, a chamada massa de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Ela pode ser estimada pela expressão acima para $\rho_o \sim \rho_{car}$. No cálculo de M_C devemos levar em conta os seguintes aspectos:

- i. as correções relativísticas da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff cujo efeito é pelas considerações feitas no capítulo 12 a um aumento da pressão em direção ao centro pois da equação TOV temos que $dP/dr \propto -P^2$. Isso leva a uma instabilidade e portanto levam a um valor menor de M_C .
- ii. A interação forte (repulsiva) entre nêutrons. Devido a este efeito a compressibilidade da matéria do núcleo é aproximadamente 10 vezes menor que a de um gás de elétrons. Este efeito tende a tornar a massa limite M_C maior.

Diferentes modelos de interação levam aos valores

$$1.5 M_{\odot} \leq M_C \leq 3 M_{\odot} \quad (14.34)$$

A densidade característica de uma estrela de nêutrons é

$$\rho_{car} = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} \approx 6 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3}$$

(densidade típica de uma estrela de nêutrons)

Está é a densidade de núcleos atômicos, da ordem de 6 trilhões de kg por centímetro cúbico. Da equação para o raio R e $\rho \sim \rho_{car}$ obtemos $R \sim 10$ km para o raio de uma estrela de nêutrons. Os efeitos relativísticos para uma estrela de nêutrons que tivesse $M = M_{\odot}$ e $R \sim 10$ km seria

$$\frac{2GM_{\odot}}{Rc^2} = \frac{r_{S,\odot}}{R} \approx 0.3$$

(campo gravitacional de uma estrela de nêutrons)

ou seja, numa estrela de nêutrons os efeitos relativísticos não são mais desprezíveis.

14.3.1 Pulsares

Em 1967 a astrofísica irlandesa Jocelyn Bell Burnell descobriu fontes de rádio que emitiam pulsos periódicos com frequência muito precisa. Este pulsos de $f \sim 1 \text{ s}^{-1} \dots 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ foram interpretados como frequências de rotação de estrelas, cuja contração era tão grande que a conservação de momento angular levava a rotações desta ordem. Os resultados experimentais condiziam com estrelas de $R \sim 10 \text{ km}$ e massa da ordem de $M \approx 1.3 \dots 1.5 M_{\odot}$. Hoje não existe mais dúvidas que estes pulsares são na verdade estrelas de nêutrons ⁴.

Os pulsos são explicados pela presença de campos magnéticos muito fortes cujo eixo não necessariamente coincidem com o eixo de rotação dos pulsares. Num efeito semelhante às auroras boreal e austral e devido a campos gravitacionais muito intensos, partículas carregadas são aceleradas em direção aos polos magnéticos e ali sofrem uma desaceleração, o que leva a uma emissão de ondas eletromagnéticas que são preferencialmente emitidas em um cone cujo eixo é o eixo magnético. Este cone gira com a frequência de rotação da estrela em torno de seu eixo e por isso observam-se os pulsos. Embora esquemática, esta explicação é consistente com as observações feitas. Em particular é possível modelar o campo magnético nas regiões dos polos por meio de transições eletrônicas entre níveis de Landau, que nada mais são que os níveis quantizados dos estados eletrônicos na presença de campos magnéticos muito intensos.

Nem toda estrela de nêutrons se nos apresenta na forma de um pulsar. Por um lado a direção do cone pode não interceptar a Terra, por outro pode haver estrelas de nêutrons sem campos magnéticos ou com campos magnéticos muito fracos.

A precisão dos pulsos dos pulsares são extremamente importantes na Astrofísica, pois pulsares funcionam com relógios. No local onde astrônomos chineses observaram uma supernova em 1054 – na Nebulosa do Caranguejo – encontra-se um pulsar. A existência de um pulsar neste local é um forte indício da relação entre o surgimento de uma supernova e de uma estrela de nêutrons como resquício da explosão.

⁴ Bell era doutoranda do grupo de A. Hewish na Universidade de Cambridge quando da sua descoberta. Embora fosse a 2ª autora do artigo, em 1974 o prêmio Nobel pela descoberta dos pulsares foi concedido a seu orientador e a Martin Ryle, astrofísico britânico responsável pelo desenvolvimento de rádio telescópios que permitiram a localização precisa de fontes de rádio no cosmos. A não concessão do prêmio à Bell é considerado um dos grandes escândalos da escolha dos agraciados e levou na época um número muito grande de cientistas a protestarem contra o fato de Bell não ter sido contemplada.

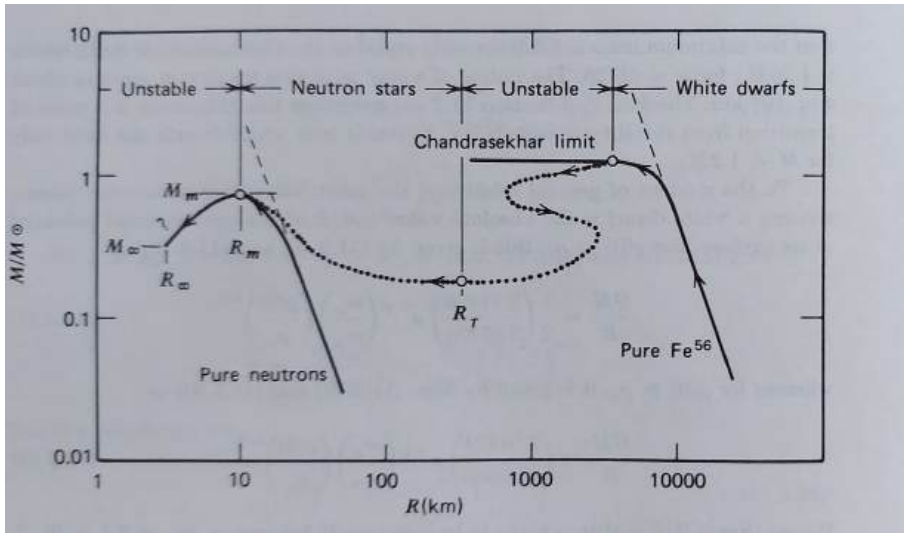


Figura 14.1: Configurações de equilíbrio estelar. As curvas sólidas à esquerda e direita representam as soluções numéricas da Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para uma estrela de nêutrons pura e a solução de Chandrasekhar para uma anã branca pura de ^{56}Fe respectivamente. As linhas tracejadas representam as extrapolações não relativísticas destes dois casos. A linha pontilhada é a interpolação que leva em conta o ciclo de ^{56}Fe até sua transformação em nêutrons. A seta indica a direção de aumento da densidade central e os pontos as regiões de transição entre estabilidade e instabilidade. Fonte: Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972), p. 318.

Modelos dinâmicos de estrelas e colapso gravitacional

O teorema de Jebsen-Birkhoff estabelece que um campo gravitacional esférico fora da distribuição de matéria é estático. Isto equivale à ideia, na Eletrodinâmica, que fora da distribuição é como se toda a matéria estivesse concentrada em $r = 0$, uma consequência direta da lei de Gauss. Discutiremos aqui a generalização dos resultados anteriores para métricas dependentes do tempo com distribuição de massa.

15.1 O teorema de Jebsen-Birkhoff e a métrica isotrópica dependente do tempo

Se quiséssemos generalizar a métrica esférica de Schwarzschild do caso estático para o caso dinâmico poderíamos simplesmente escrever

$$ds^2 = B(r, t) c^2 dt^2 - A(r, t) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (15.1)$$

ou seja, escrever o tensor métrico na forma

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(B(r, t), -A(r, t), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (15.2)$$

e recalculer o símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (15.3)$$

e com estes $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}$ calcular finalmente os elementos do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} \quad (15.4)$$

Se aplicarmos estas definições, lembrando que agora as funções dependem não apenas de r mas também de t , obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= -\frac{\dot{B}}{2B}, & \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{B'}{2B}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{B'}{2A} \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{A}}{2A}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{A}}{2B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{A}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = -\cot \theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

onde um apóstrofo f' representa $f/\partial r$ e um ponto \dot{f} a derivada $f/\partial(ct)$. Para o tensor de Ricci obtemos

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}}{4A} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) - \frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} \\ R_{11} &= -\frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{\dot{A}}{4B} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) + \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \\ R_{22} &= -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \\ R_{01} &= R_{10} = -\frac{\dot{A}}{Ar} \\ R_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{para todas as outras componentes} \quad (15.5)\end{aligned}$$

Para o caso da solução no vácuo temos $R_{\mu\nu} = 0$. De $R_{01} = -\dot{A}/(Ar) = 0$ segue que

$$\frac{1}{Ar} \frac{\partial A(r, t)}{c \partial t} = 0 \longrightarrow A(r, t) = A(r). \quad (15.6)$$

A mesma conclusão segue para a função B . Usando a relação que já usamos anteriormente no caso estático

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = 0 \quad (15.7)$$

concluimos que aqui também vale $AB = 1$. Portanto

$$B(r, t) = \frac{1}{A(r)} \longrightarrow B(r, t) = B(r). \quad (15.8)$$

Recuperamos assim a mesma solução que no caso estático, com a definição de r_S inalterada, isto é

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (15.9)$$

onde M é a massa total da distribuição. Este resultado implica que para o espaço fora da distribuição a isotropia da distribuição leva à um campo gravitacional independente do tempo, mesmo que a distribuição

não o seja. Este resultado é conhecido como [teorema de Jebsen-Birkhoff](#), que diz:

TEOREMA DE JEBSEN-BIRKHOFF:
 UM CAMPO GRAVITACIONAL COM SIMETRIA ESFÉRICA
 NO VÁCUO É ESTÁTICO

A conclusão, um tanto quanto surpreendente, é que para distribuição isotrópica de massa, a métrica exterior é a métrica estática de Schwarzschild. Isto implica também que se tivéssemos uma estrela cujo volume variasse de maneira a manter a isotropia da distribuição – uma estrela que pulsasse, por exemplo – não haverá emissão de ondas gravitacionais. No vácuo, nada acontece. Vamos assim olhar agora para métrica isotrópica na presença de matéria.

15.2 Métrica isotrópica dependente do tempo

O procedimento que seguiremos é o mesmo de sempre, porém com uma pequena diferença. Partindo da forma (15.1) permitimos que todos os coeficientes tenham uma dependência no tempo

$$ds^2 = B(r, t) c^2 dt^2 - A(r, t) dr^2 - C(r, t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (15.10)$$

Devido à simetria esférica não podemos ter termos lineares em $d\theta$ ou $d\phi$, como sabemos. Devido à livre escolha de coordenadas, podemos definir livremente duas funções $t = f_1(r', t')$ e $r = f_2(r', t')$ e escolher uma delas de tal maneira que termos proporcionais à $dr dt$ sejam nulos. Isso já está implicitamente feito na métrica acima, onde não temos termos deste tipo. Ficamos ainda com uma das funções livres e podemos escolhê-la de tal maneira que tenhamos $g_{00} = 1$. Obviamente se escolhermos escrever a métrica desta forma, nossa interpretação de r e t será diferente da interpretação para a métrica padrão de Schwarzschild. Descobriu-se que para estudar métricas de simetria esférica dependentes do tempo as chamadas [coordenadas Gaussianas](#) se mostraram mais convenientes, em particular quando estamos interessados no colapso estelar. Nestas novas variáveis podemos escrever a métrica na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U(r, t) dr^2 - V(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (15.11)$$

Métrica isotrópica em coordenadas gaussianas

onde, depois de feitas as transformações, renomeia-se as variáveis (r', t') para (r, t) . A métrica na forma (15.11) é uma alternativa à forma (15.1) onde, com exceção das coordenadas angulares, as variáveis r e t tem interpretações diferentes daquelas da forma original. Uma característica

deste sistema de coordenadas é o fato que sendo

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\rho}} \right) = g^{\lambda\rho} \frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} = 0 \quad (15.12)$$

segue que a quadrivelocidade $(u^{\mu}) = (c, 0, 0, 0)$ é solução da equação de movimento

$$\frac{du^{\lambda}}{d(ct)} = \frac{du^{\lambda}}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} u^{\mu} u^{\nu} \quad (15.13)$$

Fisicamente isto significa que sendo $u^i = dx^i/d\tau = 0$ e portanto $x^i = \text{constante}$. Contudo $x^i = \text{constante}$ é a trajetória de uma partícula em queda livre (geodésica). Como pela eq. (15.11)

$$d\tau = \left(\frac{ds}{c} \right)_{x^i = \text{const.}} \stackrel{\text{Eq. (1.11)}}{=} dt \quad (15.14)$$

o t que aparece na métrica gaussiana é o tempo-próprio de um relógio com coordenadas $x^i = \text{constante}$. Isto explica o porquê das coordenadas gaussianas serem mais comumente chamadas de **coordenadas comóveis** ¹.

¹ Em inglês *comoving coordinates*.

15.2.1 Coordenadas comóveis

Para melhor entender o significado destas coordenadas imaginemos uma estrela isotrópica formada por N partículas numeradas de $n = 1, 2, \dots, N$. Vamos supor ainda que as partículas não interagem e pode cair livremente sob ação da gravidade. A cada partícula i atribuímos um conjunto de coordenadas $(x_{\nu}^i) = (r_{\nu}, \theta_{\nu}, \phi_{\nu})$ e a cada uma está associado um relógio. Imaginemos que inicialmente todos as partículas estão em repouso e seus relógios ajustados para $t = 0$. Tão logo $t > 0$, elas começam a cair sendo que cada uma tem uma trajetória dada por $x_{\nu}^i = \text{constante}$ e os relógios a elas associados marcam o tempo t_{ν} . Um evento físico que ocorra na estrela receberá as coordenadas $x^i = x_{\nu}^i$ e a ele será associado um tempo t_{ν} onde o índice ν refere-se à partícula que se encontra no momento e no local da ocorrência do evento.

Uma vantagem destas coordenadas é que sabemos que fisicamente nada ocorre quando corpos atingem o raio de Schwarzschild e portanto elas podem ser usadas até o centro $r = 0$ da estrela. Já discutimos anteriormente que a “patologia” da métrica (15.1) (quando consideramos B e A funções de r apenas) em $r = r_S$ é uma singularidade matemática (removível), não uma singularidade física. Isto foi discutido na seção (10.7) quando falamos da interpretação física da métrica de Schwarzschild. A singularidade matemática é análoga a singularidade do polo norte/sul na superfície de uma esfera ². *Porém a singularidade em $r = r_S$ difere em ponto importante da singularidade dos polos da esfera: enquanto os polos tem as mesmas propriedades que qualquer ponto sobre a superfície da*

² Lembremos que na esfera $g^{22} = 1/\sin^2\theta$ e portanto $g^{i\nu}$ é singular.

esfera, a superfície $r = r_S$ tem propriedades físicas especiais, como elucidaremos a seguir.

Consideremos o movimento de uma partícula em queda livre na métrica de Schwarzschild estática

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (15.15)$$

A velocidade radial $\dot{r} = dr/d\tau$ satisfaz a conservação de energia (por unidade de massa)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff} &= C \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= 2(C - V_{eff}) \\ \frac{d\tau}{dr} &= \frac{1}{\sqrt{2(C - V_{eff})}} \end{aligned} \quad (15.16)$$

onde C é uma constante. Imaginemos que a partícula comece a cair da posição inicial r_o até o centro da distribuição. Sendo $\ell = 0$, o potencial efetivo se torna $V_{eff} = -GM/r$. Vamos calcular o tempo-próprio τ_1 que a partícula leva para cair de r_o até r_S :

$$\tau_1 = \int_{r_o}^{r_S} dr \frac{d\tau}{dr} = - \int_{r_o}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{2\left(1 + \frac{GM}{r}\right)}} \quad (15.17)$$

Esta integral pode ser resolvida lembrando que se a partícula tem uma velocidade inicial em r_o , então $C \geq -GM/r_o$. Caso a partícula caia a partir do repouso, então $C = -GM/r_o$. Em todo caso, a integral é finita. Se agora considerarmos o tempo de queda τ_2 até a origem $r = 0$, a integral acima é substituída por

$$\tau_2 = \int_{r_o}^0 dr \frac{d\tau}{dr} = - \int_{r_o}^0 \frac{dr}{\sqrt{2\left(1 + \frac{GM}{r}\right)}}. \quad (15.18)$$

Esta integral também é finita e podemos notar que nela, em particular, o raio de Schwarzschild r_S nem mesmo aparece! Isto significa que para uma pessoa que cai em direção ao centro de uma estrela, ela o faz num tempo-próprio finito e nada em especial acontece em r_S . Vamos agora olhar do ponto de vista de uma astrofísica longe o suficiente e cujo espaço é definido pelas variáveis coordenadas (t, r) . Lembrando da primeira equação de movimento obtida da Lagrangiana de Schwarzschild, a equação (11.23), podemos escrever

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{K}{1 - \frac{r_S}{r}} \quad (15.19)$$

onde K é uma constante de integração que depende das condições iniciais. Medida na variável t , esta partícula em queda leva um tempo infinitamente longo para cair de r_0 até r_S :

$$t_1 = \int_{r_0}^{r_S} dt = - \int_{r_0}^{r_S} \frac{K dr}{c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \sqrt{2 \left(1 + \frac{GM}{r}\right)}} = \infty. \quad (15.20)$$

Assim, a astrofísica nunca verá a partícula atingir o raio de Schwarzschild, pois para ela o tempo para que isto ocorra é infinito. Já o relógio que a partícula carrega consigo medirá um tempo finito τ_1 !

Se a partícula que cai emite um sinal em direção à astrofísica, o desvio para o vermelho é dado por

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} - 1 \xrightarrow{r \rightarrow r_S} \infty \quad (15.21)$$

o que significa que para a observadora o fóton não pode mais ser observado. Um desvio para o vermelho infinito significa um tempo Δt infinito para que um fóton ($ds = 0$) necessita, para ir de r_S até r_0 :

$$\Delta t = \int_{r_S}^{r_0} dt = - \int_{r_S}^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}} = \infty. \quad (15.22)$$

Estes resultados implicam que a coordenada t não é conveniente para descrever eventos na região $r \leq r_S$. Como para a partícula que cai

- ela leva um tempo-próprio τ_2 finito para cair de qualquer ponto até a $r = 0$ e também
- não há nada de especial em $r = r_S$,

concluimos que o tempo próprio τ é a variável correta para descrever eventos de uma partícula que cai em direção à origem da distribuição de massa. Como as coordenadas gaussianas são coordenadas próprias, elas são mais adequadas para descrever a física nas imediações de r_S ou para regiões onde $r \leq r_S$. Resumindo temos:

- A superfície $r = r_S$ é fisicamente especial. Para uma observadora externa uma partícula que cai aproxima-se do raio r_S assintoticamente ($t \rightarrow \infty$). Além disso, ela não consegue qualquer informação da região $r \leq r_S$. Por isto a superfície $r = r_S$ é chamada de *horizonte de eventos*, além do qual ela não consegue observar nada.
- Para o observador que se move com a partícula (comóvel) não há nada especial em r_S . A estrutura do espaço-tempo não é singular nesta superfície. Além disso o observador presencia eventos na região $r \leq r_S$ e portanto estes eventos existem.

iii. As coordenadas r e t não são adequadas para descrever estes eventos. Uma vez que eventos nesta região são inobserváveis, a observadora externa pode simplesmente desprezá-los.

Uma partícula obrigatoriamente pode ter um movimento de queda em direção ao centro da distribuição que não seja simplesmente da forma radial. Já para aquelas que caem radialmente, a pergunta é: como calcular (para um observador externo) a velocidade de queda? Uma vez que nas coordenadas comóveis $x^i = \text{constante}$, a velocidade radial da queda é dada pela variação temporal dos coeficientes métricos $U(r, t)$ e $V(r, t)$, como veremos a seguir. Antes devemos calcular os símbolos de Christoffel e os elementos do tensor de Ricci.

15.3 Símbolos de Christoffel e tensor de Ricci

Os símbolos de Christoffel diferentes de zero são obtidos a partir da sua definição formal. Para a métrica isotrópica em coordenadas gaussianas eles valem:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{U}}{2U}; & \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{\dot{V}}{2V}; & \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{\dot{V}}{2V} \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{U}}{2}; & \Gamma_{22}^0 &= \frac{\dot{V}}{2}; & \Gamma_{33}^0 &= \frac{\dot{V} \sin^2 \theta}{2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{U'}{2U}; & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{V'}{2U}; & \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{31}^3 &= -\frac{V' \sin^2 \theta}{2U} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{V'}{2V}; & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{V'}{2V} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta \end{aligned}$$

Já os elementos do tensor de Ricci diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} \\ R_{11} &= -\frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} \\ R_{22} &= -1 - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U} + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} \\ R_{01} &= R_{10} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} \end{aligned} \quad (15.23)$$

15.4 Colapso gravitacional e supernovas

Agora que temos uma forma para a métrica isotrópica em coordenadas gaussianas (comóveis) mais apropriadas aos nossos objetivos – e que nos permitiu calcular os $R_{\mu\nu}$ – precisamos agora resolver as Equações de Einstein satisfeitas por estes $R_{\mu\nu}$ na presença de matéria. O porquê disto é simples de entender: o colapso da estrela é oriundo da interação

de sua matéria consigo própria. Além disso trata-se de um processo dinâmico: à medida que a estrela colapsa, muda seu raio e portanto a métrica interior muda também (a métrica exterior permanece inalterada, como mostramos no início deste capítulo). Obviamente que precisamos de um modelo para a matéria, ou seja para $T_{\mu\nu}$, e o faremos usando um modelo que seja o mais simples possível mas que ainda assim nos dê uma ideia de como se processa o fenômeno. As condições que tomaremos como ponto de partida são as seguintes:

- (1.) O colapso se dá em relação ao centro da distribuição, isto é, de maneira isotrópica. Isto significa que as partículas que compõem a estrela tem velocidade radial apenas. A isto denomina-se colapso central. A métrica por nós usada será portanto

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(1, -U(r, t), -V(r, t), -V(r, t) \sin^2 \theta \right) \quad (15.24)$$

em coordenadas gaussianas (ct, r, θ, ϕ) .

- (2.) Desprezamos a pressão da matéria P_{mat} que se opõe ao colapso, isto é, à P_{grav} . Portanto

$$P_{mat} = 0 \quad (15.25)$$

Isto é equivalente a dizer que trataremos a matéria da estrela como poeira (um "gás" de partículas que não exerce pressão), com trajetórias $x^i = \text{constante}$ e velocidades

$$u^\nu = (c, 0, 0, 0) \quad (15.26)$$

Isto significa que o movimento das partículas (para um observador externo, pois no seu referencial elas não se movem) é devido à variação temporal dos coeficientes da métrica, $U(r, t)$ e $V(r, t)$. A condição P_{mat} pode nos parecer contraditória mas discutimos esta suposição mais detalhadamente logo abaixo.

- (3.) Assumimos que a densidade da estrela é homogênea, ou seja

$$\rho(r, t) = \begin{cases} \rho(t) & (r \leq r_o) \\ 0 & (r \geq r_o) \end{cases} \quad (15.27)$$

Uma vez que as coordenadas de todas as partículas são constantes durante o colapso, uma densidade homogênea no início do processo permanece homogênea durante o colapso também.

Este modelo será por nós usado não apenas para estudar o colapso mas também para outros objetos:

- o Cosmos, onde as partículas são as galáxias;
- galáxias, onde as partículas são as estrelas;

- estrelas formadas de partículas;
- estrelas para as quais a pressão gravitacional tende a infinito.

Em todos estes casos apenas velocidades centrais são permitidas. Isto nos permite estudar a expansão de nosso Universo ou o colapso de estrelas.

Sabemos que uma estrela não é formada por partículas que não exercem pressão, mas ao desprezar P_{mat} estamos desprezando o termo proporcional à pressão no tensor energia-momento. No caso de um plasma poderíamos tomar este $P = \rho k_B T/m$ e usamos estas aproximações quando estudamos o equilíbrio estelar ou equações de estado politrópicas, impondo a condição $P = P_{grav} = P$. Porém, ao estudar o equilíbrio de estrelas relativísticas chegamos à equação (13.16)

$$P(r=0) = P_0 = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - 1}. \quad (15.28)$$

para a pressão central que diverge quando R se aproxima do valor $R = 9/8 r_s$:

$$P_0 \xrightarrow{R \rightarrow \frac{9}{8} r_s} \infty \quad (15.29)$$

Portanto nas condições do colapso temos uma situação de não equilíbrio onde

$$P_{grav} \gg P_{mat} \quad (15.30)$$

e portanto a aproximação $P_{mat} \approx 0$ se justifica. O colapso será por nós descrito via a Equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (15.31)$$

onde fora da estrela ($r > r_o$) o lado direito desta equação é nulo e podemos usar a métrica de Schwarzschild estática. Estamos interessados na solução para $r \leq r_o$. Da nossa definição do tensor energia-momento para um fluido ideal temos

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \xrightarrow[\text{(15.26)}]{P=0} \rho(t) c^2 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (15.32)$$

Portanto a fonte do lado direito da Equação de Einstein pode ser escrita como

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -V \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

que se reduz à

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2} \text{diag} \left(\rho c^2, U\rho c^2, V\rho c^2, V\rho c^2 \sin^2 \theta\right) \quad (15.33)$$

Se agora igualarmos estes termos aos $R_{\mu\nu}$ por nós calculados em (15.23) obtemos

$$\frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\dot{V}}{2V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (15.34)$$

$$-\frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho U \quad (15.35)$$

$$-1 - \frac{\dot{V}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U} + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho V \quad (15.36)$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0 \quad (15.37)$$

Notemos que as primeiras três equações envolvem somas de derivadas temporais e derivadas espaciais. Podemos assim tentar uma solução via separação de variáveis com um *Ansatz* da forma:

$$U(r, t) = R^2(t) f(r), \quad V(r, t) = S^2(t) g(r). \quad (15.38)$$

Podemos obviamente argumentar que a solução da forma acima de certo modo restringe nossas opções dentro de todo um conjunto de soluções possíveis que não necessariamente podem ser escritas por separação de variáveis. Porém o problema é bem posto e claro, o que significa que eventuais soluções diferentes em forma correspondem simplesmente a diferentes escolhas de sistemas de coordenadas. Com nosso *Ansatz* a última das equações em (15.34) se torna, após uma simples álgebra, na expressão

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R} \quad \longrightarrow \quad S(t) = \text{const.} R(t) \quad (15.39)$$

Precisamos ainda determinar $f(r)$ e $g(r)$. Sempre é possível redefinir a escala da coordenada radial de modo a termos um novo $\tilde{r} = \tilde{r}(r)$ que seja uma função bem comportada de r . Podemos escolher esta nova variável da forma $\tilde{r}^2 = g(r)$. Isto significa substituir $f(r)$ por uma nova função $\tilde{f}(\tilde{r})$. Em termos da métrica isotrópica gaussiana (15.11) esta mudança corresponde à mudar o termo $R^2(t) f(r) dr^2$ para

$$\begin{aligned} R^2(t) f(r) dr^2 &= R^2(t) \tilde{f} d\tilde{r}^2 \\ f(r) dr^2 &\longrightarrow \tilde{f} d\tilde{r}^2 \end{aligned} \quad (15.40)$$

Usando a relação

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2 = g(r) &\longrightarrow 2\tilde{r} d\tilde{r} = g' dr \\ \frac{4\tilde{r}^2}{g'^2} d\tilde{r}^2 &= dr^2 \\ \frac{4g}{g'^2} d\tilde{r}^2 &= dr^2 \end{aligned} \quad (15.41)$$

Isto significa que ficamos com uma nova função $\tilde{f} = f 4g/g'^2$. Para evitar usar uma notação pesada, podemos renomear a variável r' para r e chamar a nova função $\tilde{f} = h(r)$ e escrever

$$U(r, t) = R^2(t) h(r), \quad V(r, t) = R^2(t) r^2. \quad (15.42)$$

Quando substituímos estas funções nas equações de (15.34) obtemos

$$0 = 3 \ddot{R} + \frac{4\pi G}{c^2} \rho(t) R \quad (15.43)$$

$$-\frac{h'}{r h^2} = \ddot{R} R + 2\dot{R}^2 - \frac{4\pi G}{c^2} \rho(t) R^2 \quad (15.44)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 h} - \frac{h'}{2r h^2} = \ddot{R} R + 2\dot{R}^2 - \frac{4\pi G}{c^2} \rho(t) R^2. \quad (15.45)$$

Olhando atentamente para as duas últimas equações observamos que o lado direito delas depende apenas da variável t , ao passo que o lado esquerdo envolve apenas funções de r . Isso só pode ser satisfeito se os lados forem iguais a uma constante c_1 e c_2 . Uma vez que o lado direito das duas equações são iguais, o lado esquerdo de ambas tem que ser iguais à mesma constante, ou seja $c_1 = c_2$. Por uma questão de conveniência chamemos esta constante não de c_1 ou c_2 mas de $-2k$, ficando assim com

$$-2k = -\frac{h'}{r h^2}, \quad -2k = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 h} - \frac{h'}{2r h^2}. \quad (15.46)$$

Da primeira temos $h'/h^2 = 2rk$. Substituindo este resultado no termo $h'/2rh^2$ na segunda ficamos com

$$\begin{aligned} -2k &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 h} - \frac{1}{2r} (2rk) \\ k &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 h} \\ \rightarrow h(r) &= \frac{1}{1 - kr^2} \end{aligned} \quad (15.47)$$

Com este resultado podemos escrever o elemento de linha ds^2 dentro da distribuição de massa $r \leq r_o$ como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (15.48)$$

Esta é a métrica interior de um corpo cuja $P_{mat} = 0$, ou seja, formada de poeira, com uma densidade homogênea mas não estática $\rho = \rho(t)$ e portanto adequada ao estudo do colapso gravitacional. A interpretação do termo k que aparece na expressão acima é que ele é a curvatura do espaço (discutimos abaixo um exemplo simples da superfície da esfera onde podemos ver que este termo aparece normalmente na métrica desta superfície quando calculamos o ds^2 sobre ela). Esta métrica

além de isotrópica é espacialmente homogênea, ou seja, ela tem uma curvatura constante. Este é um dos motivos pelo qual ela é usada para estudarmos a métrica do Universo na Cosmologia, onde as partículas de “poeira” são as galáxias.

É possível entender esta forma da métrica – que na verdade tem a forma da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para o Universo formado de poeira – em termos mais geométricos. A ideia-chave do modelo de Friedmann é que a qualquer instante de tempo, a curvatura do Universo é constante em todo o espaço. Isto significa que o universo de Friedmann é isotrópico, homogêneo e não tem um centro (princípio cosmológico: todos os pontos do Universo são equivalentes entre si). Para entender o significado do termo k partamos de um exemplo simples mas ilustrativo da superfície de uma esfera. O elemento de linha nesta superfície, visto por seres tridimensionais que observam a superfície de fora, pode ser escrito como

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (15.49)$$

Podemos escrever o elemento de linha em termos r (vide figura ao lado). Notando que $r = R \sin \theta$ temos

$$\frac{dr}{\cos \theta} = R d\theta, \quad (15.50)$$

disto segue que

$$R^2 d\theta^2 = \frac{dr^2}{\cos^2 \theta} = \frac{dr^2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad (15.51)$$

Com isto ds^2 se torna

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\phi^2 \quad (15.52)$$

A curvatura de uma superfície esférica de raio R vale $k = 1/R^2$ e portanto podemos escrever a expressão acima como

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\phi^2 \quad (15.53)$$

Esta forma do elemento de linha é válida para o plano, no qual $k = 0$ e o elemento

$$ds^2_{\text{plano}} = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (15.54)$$

nada mais é do que o elemento de linha escrito em termos de coordenadas polares r, ϕ . Este elemento na verdade vale para superfícies curvas em geral, sejam as curvaturas positivas ($k > 0$) ou negativas ($k < 0$).

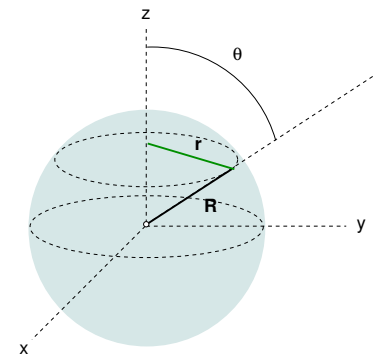


Figura 15.1: A relação entre r e R em coordenadas esféricas.

A generalização para o elemento de linha de um espaço de curvatura constante em $3 - d$ vale

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (15.55)$$

Imaginemos agora um ser bidimensional percorra todo o paralelo de raio r ilustrado na figura. Ele mede a distância percorrida e chega a um valor de $2\pi r$. Como este ser não tem acesso ao valor de r pois vive em 2 dimensões, este círculo segundo suas noções de geometria deveria ter perímetro dado por $2\pi r'$ onde $r' = R\theta$ é o "raio" da circunferência segundo seu ponto de vista, isto é a distância do círculo até o polo. Portanto, do seu ponto de vista, em uma viagem na qual ele deveria ter percorrido uma distância $2\pi r'$, ele mede na verdade uma distância $2\pi r < 2\pi r'$. Sua conclusão é que o espaço em que vive não pode ser plano, mas curvo.

A ideia de Friedmann foi considerar um universo em expansão. As galáxias não saem do lugar mas o universo se expande, ou seja, a distância física dl entre 2 pontos é multiplicada por um fator de escala $R(t)$ que muda com o tempo, ou seja

$$dl = R(t)ds \quad (15.56)$$

ou seja, o elemento de linha no universo de Friedmann vale

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (15.57)$$

Foi exatamente este resultado que obtivemos acima para o interior de uma estrela de densidade homogênea. Veremos este modelo mais detalhadamente nos capítulos posteriores quando discutirmos o modelo-padrão do Universo.

15.4.1 A determinação da função $R(t)$

Fazendo uso das duas últimas equações em (15.43) de um total de 3 equações, conseguimos determinar as funções $U(r, t)$ e $V(r, t)$ que aparecem na métrica:

$$U(r, t) = \frac{R^2(t)}{1 - kr^2} \quad \text{e} \quad V(r, t) = R^2(t) r^2. \quad (15.58)$$

Resta ainda determinar não apenas $R(t)$ mas também $\rho(t)$, a outra função que entra nestas equações. Como temos um sistema de equações poderíamos usar a primeira para eliminar a função $\rho(t)$, substituir na segunda e ficarmos com uma equação diferencial de 2ª em $R(t)$ apenas. Vamos porém seguir um caminho um pouco diferente pois temos ainda

uma equação à nossa disposição que não foi usada e cuja solução nos ajuda a melhor elucidar a física do problema. Estamos falando da conservação de energia e momento, ou seja, no fato do $\text{div } T^{\mu\nu} = 0$. Escrevendo o divergente deste tensor temos

$$T^{\mu\nu}_{||\nu} = 0 = T^{\mu\nu}_{|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} \quad (15.59)$$

Usando o resultado para o divergente (apêndice ??) temos que

$$T^{\mu\nu}_{|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \right) \quad (15.60)$$

temos que

$$T^{\mu\nu}_{||\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \right) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0 \quad (15.61)$$

Vamos escrever, dentre estas equações, aquela para o qual $\mu = 0$. Como o único termo de $(T^{\mu\nu})$ diferente de zero é T^{00} e $\Gamma^0_{00} = 0$ sobra, da equação acima:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\sqrt{|g|} T^{00} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\sqrt{|g|} T^{00} \right) = 0 \quad (15.62)$$

Como

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, R^2/(1 - kr^2), R^2 r^2, R^2 r^2 \sin^2 \theta) \quad (15.63)$$

temos que $|g| \propto R^6(t)$. Aliado ao fato que $T^{00} = \rho c^2$ ficamos com

$$\sqrt{|g|} T^{00} \propto \rho R^3 \quad (15.64)$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\sqrt{|g|} T^{00} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho R^3 = \text{constante} \quad (15.65)$$

A equação da continuidade é a lei da conservação de massa e este resultado acima pode ser escrito na forma

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho(t) R^3(t) = \text{constante}$$

(conservação de massa)

Mas podemos interpretar a função $R(t)$ como o raio da estrela? A resposta é sim: lembremos que quando fazemos uso do sistema de coordenadas comóveis, cada partícula (no seu referencial) permanece parada. Porém o termo de escala $R(t)$ faz com que a distância entre

quaisquer duas partículas mude com o tempo, ou seja, é proporcional à distância. Como a função $R(t)$ só “existe” dentro da estrela, podemos tomar $R(t)$ como sendo o raio da estrela, impondo obviamente a condição física que para um observador externo, o raio da estrela r_0 por ele observado coincida como raio R . Ao fazemos isto, assumimos também que a função $R(t)$ tenha a dimensão e comprimento e as variáveis r e k passem a ser adimensionais.

Se nos é permitido fazer isso, toda a física que daí segue deve ser coerente com nossos princípios de conservação de energia. Para verificar se a energia é conservada tomemos agora a primeira das equações em (15.43), escrevendo-a na forma

$$R\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \rho R^2. \quad (15.68)$$

Se substituirmos esta expressão na segunda equação em (15.43) ficamos com

$$-2k = -\frac{4\pi G}{3c^2} \rho R^2 + 2\dot{R}^2 - \frac{4\pi G}{c^2} \rho R^2. \quad (15.69)$$

Substituindo no lugar de ρ a massa M_0 esta expressão se torna

$$\dot{R}^2 - \frac{2GM_0}{c^2} \frac{1}{R} = -k \quad (15.70)$$

Lembrando que $\dot{f} = df/d(ct)$ e multiplicando a expressão acima por $M_0 c^2/2$ chegamos a

$$\frac{M_0}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM_0^2}{R} = \text{constante}$$

(conservação de energia)

O primeiro termo pode ser interpretado como a energia cinética da distribuição de massa, o segundo com a energia potencial.

Antes de resolver a equação diferencial (15.70) vamos resumir o que foi feito até o momento: com a escolha de coordenadas comóveis (gaussianas) e a hipótese da simetria esférica da métrica da métrica (15.11) conseguimos resolver, para $P_{mat} = 0$ (poeira) as Equações de Einstein e chegar à métrica (15.48). Neste ponto temos ainda duas funções em aberto, $\rho(t)$ e $R(t)$. As Equações de Einstein nos levam ainda à lei da conservação de massa e conservação de energia, por meio das quais podemos determiná-las. Embora estas equações sejam, do ponto de vista não relativístico, bastante esclarecedoras, não devemos nos esquecer que o tempo t que nelas aparece é o tempo medido em um referencial comóvel e a métrica espacial não é plana.

A função $R(t)$ determina o movimento das partículas cujas coordenadas são constantes. Vamos partir do ponto que no instante inicial todas estão em repouso, ou seja

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (15.1)$$

Da equação (15.70) segue que

$$k = \frac{2GM_0}{c^2} \frac{1}{R(0)} \quad (15.2)$$

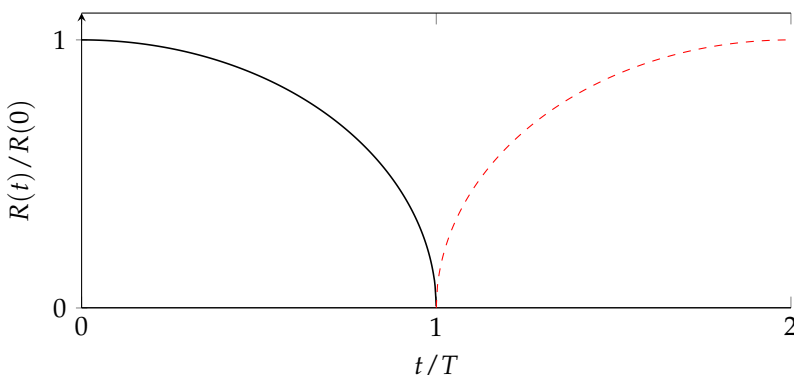
e portanto a equação diferencial se torna

$$\dot{R}^2 = k \frac{R(0) - R(t)}{R(t)} \quad (15.3)$$

Esta é a equação que define uma cicloide³. Podemos usar uma representação paramétrica da solução na forma

$$\begin{aligned} ct &= \frac{R(0)}{2\sqrt{k}} (\psi + \sin \psi) \\ R &= \frac{R(0)}{2\sqrt{k}} (1 + \cos \psi) \end{aligned} \quad (15.4)$$

Esta solução é representada na figura abaixo.



Parâmetro de comprimento $R(t)$ da métrica (15.48). Dado que *todas* as distâncias escalonam com $R(t)$ esta grandeza pode ser interpretada como o raio da estrela que colapsa. A solução física termina na singularidade em $t = T$. A solução matemática da equação pode ser continuada para $t > T$ (linha vermelha tracejada). Esta solução continuada representa uma cicloide.

A cicloide representa uma solução para um conjunto de partículas que se encontram em repouso em $t = 0$ e que devido à atração gravitacional colapsam em direção ao centro. O tempo de colapso é dado por

$$T = t_{\psi=\pi} = \frac{R(0)\pi}{2c\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2} \frac{R(0)}{c} \sqrt{\frac{R(0)c^2}{2GM_0}} \quad (15.5)$$

³ A cicloide é a curva descrita por um ponto na periferia de uma roda que se move sobre uma superfície sem deslizar. A curva (para $y \geq 0$) é descrita pelas curvas paramétricas $x(t) = r(t - \sin t)$ e $y(t) = r(1 - \cos t)$. A eliminação de t leva à $x = r \arccos(1 - y/r) - r\sqrt{y(2r - y)}$. A equação diferencial cuja solução é a cicloide é $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r}{y} - 1$.

Com estas equações estamos agora aptos para discutirmos mais detalhadamente os buracos negros no próximo capítulo. Mas antes discutamos brevemente as supernovas.

15.5 *Supernovas*

Em 1054 astrônomos chineses descreveram uma “estrela hóspede” no céu, hoje conhecida como SN 1054. O que dela sobrou é o que hoje chamamos de Nebulosa do Caranguejo. Tycho Brahe e Johannes Kepler também descreveram supernovas em 1582 e 1604, respectivamente: a conhecida Estrela de Tycho e Estrela de Kepler. Inúmeros são os relatos de supernovas ao longo da história da Astronomia. A tabela abaixo apresenta alguns destas observações ao longo da história ⁴.

Novas são estrelas cujo brilho, em poucas horas, aumenta por um fator de 10^2 a 10^4 , aparecendo no céu como se fosse uma nova estrela ⁵. Estas estrelas podem ser anãs-brancas de um sistema binário que capturaram massa de sua companheira de tal maneira a haver um aumento significativo na sua superfície e um novo ciclo de fusão se iniciar. A é uma estrela cujo brilho pode ultrapassar o de uma nova em muitas ordens de grandeza, havendo um aumento que pode chegar à 10^8 do brilho original. Uma intensidade luminosa da ordem de $L > 10^9 L_{\odot}$ são comparáveis às de toda uma galáxia. A mais famosa delas, a de 1054, pode ser observada durante a luz do dia, de tão intenso seu brilho. O brilho de uma supernova diminui dentro de poucos meses e junto com o brilho é observada uma ejeção explosiva de massa de sua periferia cuja velocidade é da ordem de 10^4 km/s.

Fenomenologicamente falando, diferencia-se entre dois tipos de supernovas: as do tipo I, com uma emissão de energia no espectro óptico da ordem de $10^{-5} \dots 10^{-4} M_{\odot} c^2$ e ejeção de massa da ordem de 0.1 à $1 M_{\odot}$ daquelas do tipo II. Estas últimas se caracterizam por emissões de energia no espectro óptico da ordem de $10^{-6} \dots 10^{-5} M_{\odot} c^2$ e massas ejetadas da ordem de $1 \dots 10 M_{\odot}$. A diferenciação destes tipos se dá pelo seu espectro: as do tipo II tem linhas espectrais de *H*, ao passo que as do tipo I não as têm.

O aumento espetacular das intensidade da estrela requer um modelo que dê conta deste fenômeno. Podemos explicar este processo pelo colapso gravitacional, considerando que no processo aproximadamente 10% da massa.

As idéias por nós discutidas em capítulos anteriores nos levam colocar o processo de colapso como seguindo basicamente 3 etapas:

Etapa 1. A queda da pressão de Fermi eletrônica, quando devido à compressão os elétrons passam a ser relativísticos, e a seção de

⁴ Fonte: D. H. Kelley, S. N. Mil-lone, *Exploring Ancient Skies: a Survey of Ancient and Cultural Astronomy*, Springer Verlag, 2011, p. 148.

⁵ O nome vem do latim *stella nova*.

Data	Nome Local	Magnitude	Fonte histórica Evidência observacional
185/6 AD (7 de Dez. - Jul.)	Nanmên Entre α e β Centauri	-8	China Espectro óptico; rádio
386 AD (Abr. - Ago.)	Nantou Sagittarius	?	China Rádio, raio-x, pulsar
393 AD (Mar. - Jul.)	Wei Scorpius	-1	China Rádio possivelmente
1006/8 AD (3 de Abril)	Tienti Lupus	-9.5	China, Japão, Europa Óptico, raio-x, rádio
1054/5 AD (10 de Junho)	Tien-kuan Nebulosa do Caranguejo (Taurus)	0	China, Japão Óptico; raio-x, rádio, pulsar
1181/2 AD (6 de Ago. a 6 de Fev)	K'uei Andromeda & Pisces	-8	China e Japão Espectro óptico; rádio
1572/74 AD (8 de Nov a Maio)	Estrela de Tycho Cassiopea	-4	Europa, China e Coréia Óptico, raio-x, rádio
1604/5 AD (8 de Out. a 7 Out.)	Estrela de Kepler Ophiucus	-2.5	China, Europa, Coréia Espectro óptico; rádio
1885 AD	S Andromedae/SN 1885A M31	+5	Moderna
1979 AD	SN 1979C M100 (Coma Berenices)	+11.6	Moderna
1987 AD	SN 1987A Grande Nuvem de Magalhães Zusammenbruchs (LMC, <i>Large Magellanic Cloud</i>)	+4	Moderna

choque da reação



leva à formação de uma estrela de nêutrons.

Etapa 2. Diminuição da pressão de Fermi dos nêutrons pois estes se tornam relativísticos. A pressão de matéria passa então da equação politrópica não relativística $P_{mat} \propto \rho^{5/3}$ para a equação politrópica relativística $P_{mat} \propto \rho^{4/3}$. Esta última, mais fraca, não consegue se contrapor à P_{grav} .

Etapa 3. O colapso da pressão de matéria, quando para $R \rightarrow (9/8)r_S$ a pressão gravitacional diverge.

As duas primeiras etapas levam, para cada um dos modelos politrópicos, a uma massa crítica (de Chandrasekhar e de Oppenheimer-Volkoff). A última etapa implica que se a estrela remanescente for compacta o suficiente, independente da matéria que a forme, ela colapsa e se torna um buraco negro, ou seja uma estrela para a qual $R \leq r_S$.

O modelo de supernovas do tipo I e II partemdo pressuposto que estas estrelas são constituídas por prótons, nêutrons e elétrons. Os neutrinos produzidos na reação entre os elétrons e prótons são imediatamente emitidos e constituem uma importante assinatura do colapso. Modelos estimas que a energia por eles transportada seja da ordem de 100 vezes a energia emitida no espectro óptico. Tais neutrinos (19 eventos no total) foram observados em 23.02.1987 por ocasião da observação da supernova SN 1987A na região da Grande Nuvem de Magalhães. Esta supernova se encontra da galáxia mais próxima a nossa, a uma distância de aproximadamente 50 kpc e é do tipo II ⁶.

Modelos de supernovas do tipo II partem da hipótese que o colapso se dá no interior de estrelas super massivas e velhas (núcleos ricos em metais, $M \sim 10 \dots 30 M_\odot$). Durante o resfriamento, passa-se pelas 3 etapas descritas acima e o tempo estimado do colapso é de 0.2 segundos. Quando a onda de choque da implosão atinge a superfície da estrela (aprox. 2 horas), a estrela intensifica seu brilho. Durante a implosão ocorre a fusão em elementos mais pesados (Pb , U) e a explosão lança ao espaço estes elementos mais pesados, que são a fonte destes no Universo (e em nosso próprio planeta). No centro do colapso resta, provavelmente, uma estrela de nêutrons e, se a massa de partida for grande o suficiente (aprox. $40 M_\odot$) um buraco negro. O paradigma de uma explosão deste tipo é a famosa supernova de 1054 descrita por astrônomos chineses na constelação de Touro. A massa expelida durante esta explosão é o que hoje conhecemos como a Nebulosa do Caranguejo. A nebulosa atingiu, passados aproximadamente 1000 anos do evento, um raio de aproximadamente 3 anos-luz. No centro desta nebulosa se observa um pulsar, isto é uma estrela de nêutrons.

⁶ Um parsec é a distância para a qual uma unidade astronômica (u.a) subtende um ângulo de 1 arcosegundo, isto é $1/3600$ de grau. O nome vem de *parallax - second* e corresponde à 3.26 anos-luz, ou 206000 unidades astronômicas. A unidade astronômica é a distância da Terra ao Sol.

Modelos de supernovas do tipo I são aqueles de anãs-brancas cujo aumento de massa se dá por acreação da massa de outra estrela do binário de estrelas da qual elas fazem parte. O processo de formação é o mesmo das do tipo II mas devido a baixa massa inicial ($M \leq M_C \approx 1.3 M_{\odot}$), é pouco provável que deste processo surja uma estrela de nêutrons ou ainda um buraco negro. A massa da estrela é muito provavelmente lançada toda ao espaço, não deixando uma estrela atrás de si. A observação de supernovas em outras galáxias leva à estimativa que em nossa Galáxia, a cada período de 10 à 30 anos surja uma supernova.

Buracos negros

Para a imensa maioria das estrelas do Universo visível, o raio de Schwarzschild r_S é muito menor que o raio r_o da distribuição de massa de uma dada estrela. Porém, devido ao colapso gravitacional e dependendo da massa inicial da estrela, ela pode se compactar tanto que seu raio r_o se torna menor que r_S . Quando isto ocorre, temos o surgimento de um buraco negro, onde toda a matéria remanescente colapsa para o centro do buraco negro e surge uma singularidade física. Discutiremos aqui como isto ocorre e as propriedades físicas destes corpos. Neste capítulo discutiremos buracos negros esféricos, sem carga e que não giram.

16.1 O que são buracos negros

Vimos nos capítulos anteriores, quando discutimos o equilíbrio de estrelas, que anãs-brancas e estrelas de nêutrons tem um limite superior de massa. O que ocorre, porém, se uma estrela de massa superior a estas massas limites colapsa? Segundo a TRG, quando a distribuição de massa atinge um tamanho tal que $r_o = r_S$, nada mais pode parar o colapso da estrela. Quanto mais ela colapsa, maiores se tornam os campos gravitacionais à sua volta e até o ponto onde nem mesmo a luz consegue mais escapar da atração gravitacional. Quando isto ocorre temos um buraco negro. De maneira simples, podemos definir um buraco negro como uma região do espaço-tempo que não pode se comunicar com o mundo exterior ¹. A fronteira desta região no espaço-tempo é a superfície do buraco negro, também chamada de *horizonte de eventos* ou *event horizon*.

Por buracos negros entendemos então uma distribuição de massa M na qual toda matéria se concentra em uma região tal que $r \leq r_S = 2GM/c^2$. Teoricamente buracos negros tem toda a sua massa concentrada em $r = 0$. Isto significa que este ponto representa uma singularidade pois neste ponto a densidade de massa e energia, *i.e.* $\rho(r = 0) \rightarrow \infty$. O termo *negro* advém do fato que quaisquer fótons que eventualmente atinjam a superfície $r = r_S$ não mais conseguem

¹ S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley-VCH, Weinheim, 2004, p. 335 ff..

escapar, fazendo com que os buracos negros não possam ser vistos. Isto significa também que qualquer observador externo não tem acesso a informação sobre o que ocorre na região onde $r \leq r_s$. Neste sentido esta região do espaço representa um buraco, onde não enxergamos o que ocorre lá dentro. As imagens recentes divulgadas pelo EHT (*Event Horizon Telescope*) em 2019 de um buraco negro no centro da galáxia M87, de massa $M \approx 6.5 \times 10^6 M_\odot$, é na verdade a imagem de fótons retroespalhados que se aproximaram o suficiente para não serem capturados, contornaram o buraco negro e emergiram do outro lado numa direção oposta àquela de onde vieram. É interessante chamar a atenção para o fato que a grande maioria dos livros sobre TRG escritos até meados de 2010 discutem buracos negros como fenômenos ainda hipotéticos, embora já amplamente aceitos como objetos físicos reais e não como meros construtos teóricos. Isto porque em 1964 descobriu-se uma poderosa fonte de raios-X na constelação de Cygnus, batizada como Cygnus X-1. Uma série de observações mais precisas realizadas entre os anos de 1970 e 1972 conseguiram localizar a fonte de raios-X como sendo a estrela HDE 226868. Por se tratar de uma supergigante incapaz, por si só, de emitir radiação neste espectro, aventou-se a hipótese de que próximo a ela havia um corpo estelar capaz de aquecer os gases da estrela a temperaturas altas o suficiente (milhões de graus) para que raios-X fossem emitidos. Estudos do desvio Doppler no espectro da estrela permitiu concluir que ela era acompanhada por um objeto cuja massa, pela sua magnitude, não poderia ser uma estrela de nêutrons e portanto poderia ser um buraco negro. Por volta de 1973 a comunidade científica já dava como certa a existência de um buraco negro em Cygnus X-1. A confirmação de que o sistema binário realmente era formado por uma supergigante e um buraco negro foi feita em 2011². Desde então não resta dúvida quanto à sua existência. Acredita-se hoje que no centro de todas as galáxias haja buracos negros super massivos.

Vale a pena lembrar que a singularidade é um construto teórico, pois não sabemos exatamente o que acontece dentro do buraco negro. Buracos negros que tenham uma massa da ordem de M_\odot , têm uma densidade da ordem de $10^{17} \text{ g cm}^{-3}$, ou seja, 1000 vezes mais denso que o núcleo atômico. A pergunta que podemos fazer é se não haveria outro fenômeno que, em densidades desta monta, levariam a uma pressão de matéria grande o suficiente para impedir que o colapso ocorresse. Há dois fatores a serem considerados: primeiro, a partir do momento que a massa que colapsa atinge o raio de Schwarzschild, todas as linhas de mundo das partículas levam inexoravelmente para um $r < r_s$. É impossível parar o colapso. Um eventual aumento de pressão por algum mecanismo levaria a um consequente aumento da energia, que por sua vez contribuiria para um aumento do campo

² M. J. Reid *et. al.*, *The trigonometric parallax of Cygnus X-1*, *ApJl* **742** (2011), 83; Jerome A. Orosz *et al.* 2011 *ApJ* **742** (2011), 84; Lijun Gou *et al.* *ApJ* **742** (2011), 85.

gravitacional, alimentando o colapso. A questão se a singularidade é realmente uma singularidade ou tem um tamanho pequeno mas finito, com uma densidade incrivelmente alta – uma hipótese que nos parece mais plausível – só poderá ser eventualmente respondida com uma teoria quântica da gravitação.

Tudo o que ocorre dentro do buraco negro não escapa para fora dele – diz-se que ele está *causalmente desconectado* do mundo exterior – e pelo teorema de Jebsen-Birkhoff, até $r \rightarrow r_S^+$, o espaço é descrito pela métrica estática de Schwarzschild. Ao atingirmos $r = r_S$ a métrica deixa de ser válida, pois o termo $g_{00} = 0$ e $g_{rr} \rightarrow \infty$. Como já pudemos mencionar anteriormente, esta é uma singularidade matemática, da mesma maneira que a métrica sobre a superfície de uma esfera é singular nos polos. Por isso, estudar buracos negros requer escolher coordenadas corretas para descrever o espaço tempo nas imediações do horizonte de eventos e além dele. A solução que temos das equações de Einstein na forma da métrica de Schwarzschild são as soluções mais simples de buracos negros esféricos. Buracos negros reais, no entanto, não são necessariamente esféricos nem mesmo estacionários, podendo inclusive ter momento angular. Mas, apesar da sua complexidade, a solução geral para buracos negros esféricos e estacionários é conhecida e depende de três parâmetros físicos apenas: a massa M do buraco negro, sua carga Q caso a tenha e seu momento angular L , caso o possua. Toda eventual informação necessária para descrever o buraco negro é irradiada na forma ondas eletromagnéticas e gravitacionais durante o colapso, sobrando apenas estas três grandezas. Isto levou Wheeler a comentar certa vez que “*black holes have no hair*”. Este resultado é provado rigorosamente e conhecido como **no-hair theorem**. A solução de Schwarzschild é para buracos negros sem carga e momento angular ($L = 0$, $Q = 0$). A solução para buracos negros com momento angular L mas sem carga ($Q = 0$) foi obtida por Kerr em 1963 e é conhecida com métrica de Kerr ³. A solução com carga mas sem momento angular ($L = 0$) é conhecida como métrica de Reissner-Nordström, e foi descoberta independentemente por Hans Reissner, Hermann Weyl, Gunnar Nordström e George Barker Jeffery entre 1916 e 1921 ⁴. A solução geral é conhecida como métrica de Kerr-Newman ⁵. A solução de Schwarzschild corresponde à $L = 0$ e $Q = 0$. Estas três propriedades de buracos negros podem ser observadas estudando-se o movimento de corpos que orbitam buracos negros, no caso da massa M ; estudando o comportamento de cargas próximos a buracos negros para determinação da carga Q e, no caso do momento angular, através da precessão de giroscópios devido ao efeito de Thirring-Lense. O efeito de Thirring-Lense é uma distorção do espaço tempo causada pela rotação da massa e pode ser observada por exemplo no nosso Sol. Ele também é conhecida como *frame-dragging*, ou arrasto do sistema de

³ Roy P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Physical Review Letters. 11 (5) (1963),237–238.

⁴ H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik 50 (9) (1916),106–120; H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie*, Annalen der Physik 54 (18) (1917), 117–145; G. Nordström, *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam. 26 (1918), 1201–1208; G. B. Jeffery, *The field of an electron on Einstein's theory of gravitation*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 99 (697) (1921): 123–134.

⁵ E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. J. Torrence *Metric of a rotating charged mass*, J. Math. Phys. 6 (6) (1965), 918 - 919.

coordenadas, e basicamente diz que próximo a uma massa que gira, o espaço-tempo não é estático e qualquer corpo sob sua influência é arrastado junto com o sistema de coordenadas quando visto por um observador externo.

A tabela abaixo resume os tipos de métricas para diferentes tipos de buracos negros:

Métrica	M	Q	L
Schwarzschild (1916)	✓		
Reissner-Nordström (1916/17)	✓	✓	
Kerr (1963)	✓		✓
Kerr-Newman (1965)	✓	✓	✓

16.2 *Michell, Laplace e estrelas escuras*

Embora os buracos negros pareçam assunto muito recente – e sob muitos aspectos eles realmente o são – ao menos a idéia que estrelas poderiam ser tão compactas e densas que nem mesmo a luz poderia delas escapar remonta ao século XVIII. O primeiro a se referir à possível existência de *dark stars* foi o cientista e reverendo inglês John Michell (1724–1793), cujo trabalho foi relegado ao esquecimento e apenas recentemente resgatado. Considerado um verdadeiro polímata, Michell não apenas propôs a existência de buracos negros como aplicou idéias de estatística ao estudo do Universo e teorizou que os terremotos se propagam através de ondas sísmicas. Segundo um editorial da APS (*American Physical Society*), ele foi *a man so far ahead of his scientific contemporaries that his ideas languished in obscurity, until they were reinvented more than a century later*⁶. No que diz respeito às *dark stars*, Michell calculou a velocidade que uma partícula de luz adquiriria ao cair na direção de uma estrela qualquer cuja densidade fosse a do nosso Sol. Com isto ele estima a dimensão de uma estrela para a velocidade de escape fosse maior que a da luz, concluindo:

16. Hence, according to article 10, if the semi-diameter of a sphere of the same density as the sun were to exceed that of the sun in the proportion of 500 to 1 [...] supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae [mass] with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it, by its own proper gravity⁷.

Podemos ilustrar a idéia de Michell imaginando, como ele, que a luz é formada de partículas de massa não nula. Ao ser emitida em direção ao espaço, segundo Michell – desde que o tamanho da estrela fosse grande o suficiente – a luz “cairia” de volta e portanto não chegaria até nós. A parte mais surpreendente do texto de Michell é talvez a seção onde ele afirma:

⁶ Alan Chodos, *November 27, 1783: John Michell anticipates blackholes*, APS News 18, November 2009.

⁷ John Michell, *On the means of discovering the Magnitude, Distance &c. of the Fixed Stars, in consequence of the Diminution of the Velocity of their Light, in case such a Diminution should be found to take place in any of them, and such other Data should be procured from Observations, as would be farther necessary for that Purpose*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 74 (1784), pp. 35 - 57.

29. If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us; of if there should exist any other bodies of a somewhat smaller size, which are not naturally luminous; of the existence of bodies under either of these circumstances, *we could have no information from sight; yet, if any other luminous bodies should happen to revolve about them, we might still perhaps from the motions of these revolving bodies infer the existence of the central ones with some degree of probability, and this might afford a clue to some of the apparent irregularities of the revolving bodies, which would not be easily explicable on any other hypothesis*⁸.

O que é mais extraordinário nesta passagem, além da suposição que tais corpos seriam impossíveis de serem vistos, é que sua presença poderia ainda ser detectada por observações de irregularidades na órbita de sistemas binários!

Alguns anos mais tarde, o matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), sem conhecer o trabalho de Michell aparentemente, chegou à expressão do raio de Schwarzschild embora, obviamente, não o tenha interpretado como hoje o fazemos. Isto foi feito no seu famoso tratado *Exposition du Système du Monde*, de 1796⁹.

Como sabemos, a velocidade de escape de uma partícula da atração gravitacional de um planeta ou estrela sai da condição

$$E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad (16.1)$$

onde v_{esc} é a velocidade de escape e R o raio do planeta ou estrela. Se impusermos que $v \rightarrow c$ temos da equação acima que

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GM}{R} \rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} = r_S \quad (16.2)$$

Vale a pena lembrar que Laplace acreditava – bem como para os físicos de sua época – que a luz era formada de partículas com massa e portanto o cálculo acima se justificava. Com este resultado Laplace conseguiu mostrar que se o corpo tivesse um raio $r \leq r_S$, nem mesmo a luz conseguiria escapar de sua atração gravitacional.

Quando Schwarzschild publicou sua solução isotrópica das Equações de Einstein no vácuo, em 1916, ninguém obviamente sabia que ela descrevia um buraco negro. A existência de uma singularidade em $r = r_S$ era evidente mas não se tinha muito idéia do que isto significava. Por um lado um tanto quanto pragmático, essa singularidade (que Lemaître mostrou mais tarde ser matemática) era irrelevante pois o raio de Schwarzschild era infinitamente menor que o raio das estrelas conhecidas, estando portanto dentro delas. Porém, dentro da estrela a solução de vácuo não é mais válida e portanto não fazia sentido pensar numa singularidade de uma métrica que obviamente não se aplicaria em r_S . Em 1931 no entanto Chandrasekhar descobriu um

⁸ J. Michell, *op. cit.*, p. 50. Os itálicos são meus.

⁹ Laplace é autor da monumental obra *Traité de Mécanique Céleste* em 5 tomos, que é considerada, junto com o *Principia* de Newton, o tratado mais importante para o desenvolvimento da física moderna.

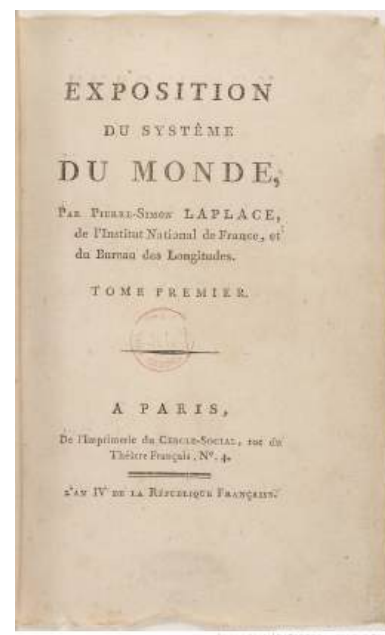


Figura 16.1: Capa do volume I do *Exposition du Système du Monde*.

limite superior para a massa de anãs brancas ¹⁰. Ficou claro que se os resultados de Chandrasekhar fossem corretos, isto implicaria no colapso estelar, embora grandes nomes com Eddington e Landau. Este último chegou a obter o limite superior através de uma dedução mais simples e conclui qued

[...] there exists in the whole quantum theory no cause preventing the system from collapsing to a point. ¹¹

Landau porém coloca em dúvida este fato pois mais à frente diz:

As in reality such masses exist quietly as stars and do not show any such tendencies, we must conclude that all stars heavier than $1.5 M_{\odot}$ certainly possess regions in which the laws of quantum mechanics (and therefore quantum statistics) are violated. ¹²

Foi apenas em 1939 que Oppenheimer e Snyder retomaram a discussão do colapso gravitacional e mostraram que, de acordo com a Relatividade Geral, uma estrela esférica homogênea sem pressão de matéria (poeira) colapsaria e esta esfera não teria mais qualquer maneira de afetar a região do espaço-tempo externo a ela. Este trabalho é considerado a primeira dedução rigorosa da existência de buracos negros ¹³. O tema ficou praticamente ignorado até que no final do anos 50, por iniciativa de Wheeler e colaboradores. Este renascimento culminou com os trabalhos de Kruskal, Szekeres, Kerr e Newman, trabalhos estes que foram fortemente motivados pelas descobertas de fontes de raio-X compactas em 1962, quasares em 1963 e pulsares em 1968. Atualmente, particularmente do ponto de vista teórico, é uma das áreas mais ativas da astrofísica.

16.3 Como entender buracos negros

Discutir buracos negros passa primeiro por acharmos coordenadas adequadas para descrever a métrica, onde por adequado queremos dizer uma métrica bem comportada. É fácil entender isto se voltarmos um pouco à métrica Schwarzschild, que define a geometria do espaço-tempo fora de uma estrela esférica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (rr_o), \quad (16.3)$$

onde r_o é o raio da estrela. O raio de Schwarzschild r_S é uma função da massa M da estrela apenas. O que é importante notar também é que esta métrica serve *em princípio* para descrever o buraco negro como um todo, afinal estando sua massa M concentrada na singularidade $r = 0$, não existe uma métrica interna de Schwarzschild. Enfatizamos o termo *em princípio* acima pois a forma de Schwarzschild (16.3) tem uma singularidade *matemática* e não física em $r = r_S$, como mostrado

¹⁰ R. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, *Astrophysics Journal* 74 (1931), 81.

¹¹ L. D. Landau, *On the Theory of Stars*, *Phys. Zeit. Sowietunion* 1 (1932), 235.

¹² L. D. Landau, *ibid.*

¹³ J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, *Phys. Rev.* 56 (1939), 455.

pela primeira vez por Lemaître em 1933. Uma indicação que $r = r_S$ não representa uma singularidade física é dada pelo fato que o determinante g da métrica $g_{\mu\nu}$, que aparece em muitas equações de interesse da TRG, é simplesmente

$$g = -r^4 \sin^2 \theta, \quad (16.4)$$

e portanto não tem nenhum comportamento anômalo em $r = r_S$. Também o invariante relativístico, o escalar de Kretschmann (1915),

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12 r_S^2}{r^6} \quad (16.5)$$

mostra claramente que em $r = 0$ a curvatura de Kretschmann vai a infinito e portanto este ponto representa uma **singularidade física** verdadeira. Vamos por isso nos concentrarmos nas próximas seções à descrição de variáveis adequadas para descrever a métrica que se aplique a todo o espaço fora da singularidade.

16.4 *Queda livre de partícula na superfície da estrela vista de um referencial distante*

As equações de movimento por nós obtidas no capítulo 11 a partir da Lagrangeana de Schwarzschild, eqs. (11.15) e (11.19), nos permitem estudar o que acontece com a superfície da estrela. Para isto imaginemos uma partícula que a constitui localizada exatamente na superfície e que se encontra em queda livre na direção radial. Considerando então que $\theta = \pi/2$ (plano equatorial) e $\ell = 0$ (momento angular nulo) obtemos

$$\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) = \frac{F}{c} \quad (16.6)$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r_S}{r} = \frac{F^2}{c^2} - 1 \quad (16.7)$$

onde F é uma constante que depende das condições iniciais do problema. A primeira equação representa a relação entre o tempo-próprio da partícula e o tempo-coordenada. Vamos supor que a partícula caiu do repouso ($\dot{r}(0) = 0$) e de uma distância inicial $r(0) = ar_S$ como já discutido na seção anterior. Com estas condições iniciais temos, da 2ª equação que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \dot{r}(0)^2 - \frac{r_S}{ar_S} &= \frac{F^2}{c^2} - 1 \\ \frac{F^2}{c^2} - 1 &= \frac{1}{a} \\ \frac{F}{c} &= \sqrt{\frac{a-1}{a}} \end{aligned} \quad (16.8)$$

Com isto as equações de movimento se tornam

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \sqrt{\frac{a-1}{a}} \quad (16.9)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{c}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{ar_S}{r} - 1}. \quad (16.10)$$

O sinal negativo na equação acima foi escolhido pois r diminui com o passar do tempo. É importante que não nos esqueçamos para uma pessoa que observa este evento da Terra, o tempo medido é o tempo-coordenada t e não τ . Portanto de seu ponto de vista a equação da superfície da estrela tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{ar_S}{r} - 1} \left(\frac{d\tau}{dt}\right) \\ &= -\frac{c}{\sqrt{a-1}} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \sqrt{\frac{ar_S}{r} - 1} \end{aligned} \quad (16.11)$$

onde, na passagem de linha de cima para a linha de baixo usamos a relação entre o tempo-próprio τ e o tempo-coordenada t .

A equação para $r(t)$ só tem solução numérica. Ela é representada junto com a solução do referencial-próprio da partícula (ciclóide) na figura abaixo. A aproximação assintótica – do ponto de vista do re-

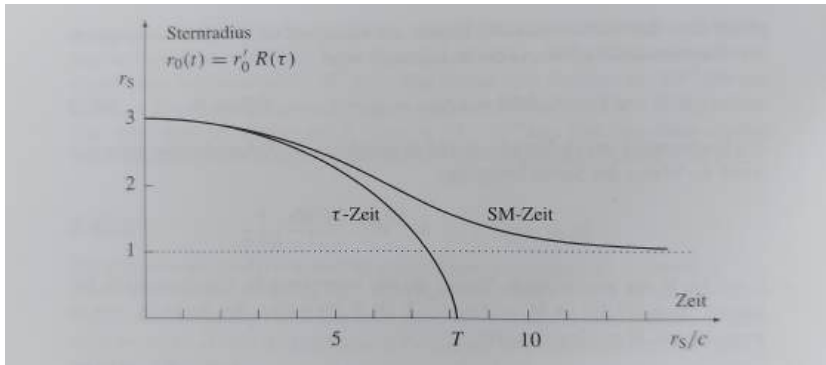


Figura 16.2: Colapso da superfície de uma estrela inicialmente em repouso e com raio inicial $r_o(0) = 3r_S$. Uma curva diz respeito ao tempo de colapso T do ponto de um observador que se move junto com a superfície ($T \approx 8.16 r_S/c$, na figura chamado de τ -Zeit) e do ponto de vista de um observador também em repouso em um referencial suficientemente longe (na figura, SM-Zeit). Para alguém que observa de fora a estrela se encolhe numa escala de tempo da ordem de r_S/c e desaparece. Fonte: T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, p. 284.

ferencial externo – para o valor r_S pode ser melhor analisada e nos ajuda a entender o que realmente veríamos caso pudéssemos observar o fenômeno. Para isto vamos resolver a equação (16.11) para um r próximo de r_S , isto é

$$r = r_S + \delta \quad (16.12)$$

onde $\delta/r_S \ll 1$. A equação (16.11) pode ser escrita então na forma

$$\frac{d(r_S + \delta)}{dt} = \frac{c}{\sqrt{a-1}} \left(1 - \frac{r_S}{r_S + \delta}\right) \sqrt{\frac{ar_S}{r_S + \delta} - 1} \quad (16.13)$$

Observando que

$$\frac{d(r_S + \delta)}{dt} = \frac{d\delta}{dt}, \quad \frac{r_S}{r_S + \delta} = \frac{1}{1 + \delta/r_S} \approx 1 - \frac{\delta}{r_S} \quad (16.14)$$

podemos usar estas aproximações na equação acima escrevendo-a como

$$\begin{aligned}
 \frac{d\delta}{dt} &\approx \frac{c}{\sqrt{a-1}} \left(1 - 1 + \frac{\delta}{r_S}\right) \sqrt{a - \frac{a\delta}{r_S} - 1} \\
 &= \frac{c}{\sqrt{a-1}} \left(\frac{\delta}{r_S}\right) \sqrt{a-1} \sqrt{1 - \frac{a}{a-1} \frac{\delta}{r_S}} \\
 &= c \left(\frac{\delta}{r_S}\right) \sqrt{1 - \frac{a}{a-1} \frac{\delta}{r_S}}. \tag{16.15}
 \end{aligned}$$

Se agora expandirmos a raiz quadrada segundo $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \dots$ e retivermos apenas os termos em primeira ordem em δ/r_S obteremos finalmente

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{c}{r_S} \delta + \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{r_S}\right)^2 \tag{16.16}$$

Podemos resolver a equação diferencial acima segundo

$$\begin{aligned}
 \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{c}{r_S} \delta \\
 \frac{d\delta}{\delta} &= -\frac{c}{r_S} dt \\
 \rightarrow \delta &= \delta_0 e^{-\frac{tc}{r_S}}, \tag{16.17}
 \end{aligned}$$

e portanto

$$r = r_S + \delta_0 e^{-\frac{tc}{r_S}}. \tag{16.18}$$

Portanto, para uma observadora externa a superfície da estrela aproxima assintoticamente o raio de Schwarzschild r_S em um tempo da ordem de r_S/c ou seja

$$t \sim \frac{r_S}{c} = \frac{M}{M_\odot} \cdot 10^{-5} \text{ s} \tag{16.19}$$

16.5 O que veríamos e o desvio gravitacional para o vermelho*

A pergunta que podemos nos fazer agora é sobre o que veríamos caso tivéssemos a oportunidade de observar, a uma distância segura, o colapso da estrela até seu raio de Schwarzschild. Para isto temos que imaginar o que ocorre com um fóton emitido por um átomo na superfície da estrela e do *desvio para o vermelho* devido à TRG. Vamos fazer o cálculo para um átomo emissor na posição arbitrária \mathbf{r}_A e uma observadora na posição \mathbf{r}_B . Por definição o tempo próprio no local de ocorrência da emissão é dado por

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt \tag{16.20}$$

onde estamos obviamente interessados em intervalos tipo-tempo ($l < ct$) ou seja, $ds^2 > 0$. Na expressão acima x^μ representa uma coordenada. No referencial comóvel vale que $dl = 0$ e portanto para o átomo que emite temos

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt \quad (16.21)$$

que relaciona, como sabemos, o tempo-próprio da partícula emissora com o tempo-coordenada da observadora distante. Na superfície e fora dela temos um campo constante (pelo Teorema de Birkhoff). Isto significa que um átomo que emite um fóton e se encontra na superfície ou fora dela emitirá um sinal de frequência

$$\nu_A = \frac{1}{\Delta \tau_A} \quad (\tau_A = \text{tempo-próprio do emissor}). \quad (16.22)$$

Para a observadora, ao intervalo-próprio $\Delta \tau_A$ corresponde, no seu relógio-coordenada, o intervalo de tempo Δt_A :

$$\Delta t_A = \frac{\Delta x^0}{c} = \frac{\Delta \tau_A}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} \quad (16.23)$$

O sinal emitido em \mathbf{r}_A será observado em \mathbf{r}_B . Uma vez que a métrica exterior é independente do tempo, dois sinais emitidos num intervalo de tempo Δt manterão o intervalo ao longo de sua trajetória até a observadora. Isto significa que uma sequência de sinais emitidos terão, em cada ponto do espaço, a mesma *distância* temporal entre si. A frequência observada é diferente para cada ponto do espaço mas para um ponto fixo, ela não muda. Como a métrica é função da posição temos que, no ponto \mathbf{r}_B o intervalo observado será

$$\Delta t_B = \sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)} \Delta t_A \quad (16.24)$$

e portanto

$$\nu_B = \frac{1}{\Delta t_B} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)} \Delta t_A}. \quad (16.25)$$

Combinando estas expressões obtemos finalmente

$$\nu_B = \nu_A \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_A)}{g_{00}(\mathbf{r}_B)}} \quad (16.26)$$

Este resultado implica que se $g_{00}(\mathbf{r}_A)$ é diferente de $g_{00}(\mathbf{r}_B)$, um observador parado em B medirá uma frequência diferente daquela do sinal emitido por um emissor parado em A .

O desvio para o vermelho devido à métrica do espaço é definido pela grandeza z segundo

$$z = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{r}_B)}{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} - 1 = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} - 1 \quad (16.27)$$

Na métrica de Schwarzschild, dado que conhecemos g_{00} podemos escrever diretamente

$$z = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_B}{1 - r_S/r_A}} - 1. \quad (16.28)$$

No caso de um ponto de observação r_B muito distante da estrela e para uma estrela cuja raio é muito maior que seu r_S (nosso Sol por exemplo), podemos expandir a expressão acima na forma

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - r_S/r_B}{1 - r_S/r_A}} &= \left(1 - \frac{r_S}{r_B}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_S}{r_A}\right)^{-1/2} \\ &\approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_S}{r_B}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S}{r_A}\right) \end{aligned} \quad (16.29)$$

de onde concluímos que

$$\frac{v_A}{v_B} = 1 + \frac{r_S}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right). \quad (16.30)$$

Para o sistema Terra (B) + Sol (A) temos $r_A \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$, $r_B \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ($1/r_A \gg 1/r_B$) e $r_S \approx 3 \text{ km}$. Com estes valores obtemos da expressão acima o valor para o *redshift* gravitacional:

$$\frac{v_{Terra}}{v_{Sol}} \approx 1 - 2.1 \times 10^{-6}. \quad (16.31)$$

O efeito Doppler da TRE para os gases da superfície do Sol

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (16.32)$$

já mascaram o desvio gravitacional quando a velocidade destes gases é da ordem de 1 km/s . Portanto o desvio gravitacional para o vermelho é muito difícil de ser observado, mas já foi medido com precisão de aproximadamente 10% do valor teórico.

No caso da observação do colapso, podemos simplificar ainda mais esta expressão pois se a observadora se encontra muito longe da estrela, $r_B \gg r_S$ e portanto podemos tomar $\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_B}} \approx 1$. No caso da superfície da estrela $r_A = r_o$, temos que o desvio para o vermelho de um fóton emitido na superfície de uma estrela distante que colapsa vale:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_S/r_o}} - 1 \xrightarrow{r_o \rightarrow r_S} z \approx \exp\left(\frac{ct}{2r_S}\right), \quad (16.33)$$

ou seja, o desvio para o vermelho se torna infinito. Para nossa observadora, a contração a partir de uma configuração $r_o \gg r_S$ ocorre lentamente, com velocidades não relativísticas da superfície da estrela e $z \ll 1$. Tão logo r_o se torne da ordem de r_S , ocorre uma aceleração da superfície para velocidades relativísticas (v . eq. 16.17)

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{c}{r_S} \delta \quad (16.34)$$

Como a observadora postada em $r_B \gg r_o$ vivencia este acontecimento? Na estrela em colapso, os núcleos atômicos, que devido à proximidade do r_S são ionizados e adquirem velocidades muito altas, emitem radiação eletromagnética. Primeiro, nossa observadora verá a estrela aumentar seu brilho. Quanto mais r_o se aproxima de r_S , segundo a equação (16.28), mais desviada para o vermelho se torna a radiação (há também o desvio Doppler para o vermelho devido à relatividade restrita). Com o aumento progressivo do desvio para comprimentos de onda maiores, diminui a energia dos fótons e conseqüentemente a intensidade da luz. Após o brilho inicial, passado um tempo da ordem de r_S/c , a estrela passa a não ser mais vista, embora continua emitindo fótons. Uma vez que para a observadora a periferia da estrela sempre estará aquém de r_S , e esta superfície só é atingida num tempo infinito, não existe para ela buracos negros, mas sim “singularidades nuas” (*naked singularities*), isto é um análogo do buraco negro mas sem uma horizonte de eventos e portanto (teoricamente) observável. Estes objetos nunca foram observados mas sua existência permitiria estudarmos corpos com densidade infinita. Acredita-se que os buracos negros tenham surgido por ocasião do Big-Bang.

16.6 A trajetória de partículas e fótons na métrica de Schwarzschild

Pela singularidade matemática da métrica de Schwarzschild fica claro que estas coordenadas não as melhores possíveis para descrever o que acontece para $r < r_S$. Mas faz sentido pensar que uma partícula que caia em direção ao buraco negro precise ser estudada nesta região? Em princípio não há nada que impeça que uma partícula, ao atingir o evento horizonte, passe para o lado de lá. O tempo-próprio para que ela alcance este ponto é finito e a menos que houvesse uma singularidade de curvatura em $r = r_S$ (o que não há), as forças de maré não são fortes o suficiente para destruir o corpo. Vamos tentar entender o que acontece geometricamente nesta situação segundo as variáveis de Schwarzschild.

Consideremos apenas o movimento radial de fótons, ou seja $d\theta = d\varphi = 0$ ao longo de suas linhas de mundo. Em se tratando de fótons, suas linhas de mundo são geodésicas nulas, $ds^2 = 0$, que quando substituídas na métrica de Schwarzschild (16.3) resultam em

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2, \quad (16.35)$$

ou, tirando a raiz quadrada de ambos os lados

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c. \quad (16.36)$$

O sinal + e - indica um fóton que se move para longe ou para perto da massa, respectivamente. Estas equações mostram que ao aproximar-se de r_S a velocidade do fóton $\rightarrow 0$. Do ponto de vista geométrico, isto significa que o cone de luz, nestas coordenadas, vai se tornando cada vez mais estreito, como a figura ao lado demonstra.

Como toda partícula com massa tem sua linha de mundo dentro do cone de luz, pois ela sempre tem uma velocidade menor que a da luz, isto significa que esta linha se torna cada vez mais vertical e ela leva um $t = \infty$ para chegar à r_S . É importante notar que a figura acima representa não a geometria real do espaço-tempo mas sim apenas as coordenadas. Fica claro que ela é uma escolha ruim pois os cones de luz não se fecham, uma vez que as partículas atingem $r = r_S$ num tempo finito e não encontram nada de especial neste ponto. Portanto, o ponto-chave aqui é encontramos coordenadas apropriadas para representar o que está realmente acontecendo. Foram necessários muitos anos até que as coordenadas apropriadas fossem descobertas em 1960 por Martin Kruskal e George Szekeres, de forma independente ¹⁴.

Há várias transformações que eliminam a singularidade da métrica de Schwarzschild. A primeira delas foi descoberta em 1924 por Eddington e redescobertas em 1956 por Finkelstein. As transformações de Eddington-Finkelstein são na verdade um caso particular das transformações de Kruskal-Szekeres, pois elas se aplicam somente à parte do espaço de Schwarzschild, ao passo que as últimas são a extensão natural para todo o espaço. Discutiremos isto a seguir.

16.7 As coordenadas de Eddington-Finkelstein

Antes de Kruskal e Szekeres, Eddington descobriu uma transformação de coordenadas que permite entender um pouco o que se passa com um fóton que cai em direção ao buraco negro. É preciso estudar esta equação em coordenadas apropriadas, as coordenadas de Eddington-Finkelstein ¹⁵ Vamos estudar o caso de um fóton que se aproxima da massa (sinal - na equação acima) e passa pelo raio de Schwarzschild. Reescrevamos a equação acima na forma

$$\frac{r}{1-r_S} dr = -cdt \tag{16.37}$$

e a integremos

$$\int \frac{r}{1-r_S} dr = - \int c dt \rightarrow r + r_S \ln|r - r_S| = -ct + K \tag{16.38}$$

onde K é uma constante de integração. A idéia é escrever a equação na forma

$$r = -c\bar{t} \tag{16.39}$$

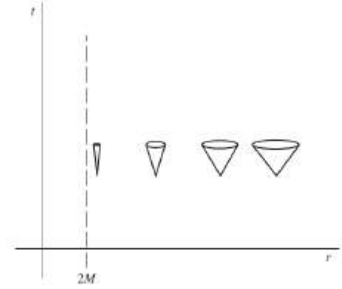


Figura 16.3: Os cones de luz nas coordenadas de Schwarzschild à medida que nos aproximamos do raio de Schwarzschild r_S , representando na figura por $r = 2M$. Este valor para o raio de Schwarzschild é bastante comum pois muitos autores adotam para a constante gravitacional G e a velocidade da luz c os valores $G = 1$ e $c = 1$. Portanto $r_S = 2GM/c^2$ se reduz à $2M$.

¹⁴ M. D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. 119 (1960), 1743; G. Szekeres, *On the singularities of a Riemannian manifold*, Publ. Mat. Debrecen 7 (1960), 28-301.

¹⁵ Arthur S. Eddington (1882 - 1944), célebre astrônomo e físico inglês, escreveu os primeiros artigos em inglês explicando a TGR para o público de língua inglesa. Coordenou um dos famosos experimentos de 1919 sobre a deflexão da luz pelo campo gravitacional do Sol. David R. Finkelstein (1929-2016) foi um físico americano, especializado em TGR.

definindo uma nova coordenada temporal (coordenada de Eddington-Finkelstein) de tal modo que no relógio que meça \bar{t} o fóton se mova na direção radial com velocidade $-c$. Uma comparação desta forma com a equação acima nos mostra que

$$\bar{t} = t + \frac{r_S}{c} \ln |r - r_S| \quad (16.40)$$

Como dito, este é o tempo medido por um relógio que é diferente do tempo de coordenada t de Schwarzschild mas para o qual o fóton se move com velocidade c constante. Com um pouco de álgebra podemos reescrever a métrica de Schwarzschild em termos de $d\bar{t}$ de tal modo que (??) se torna

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &+ 2 \frac{r_S}{r} c d\bar{t} dr + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 \end{aligned} \quad (16.41)$$

[Este resultado nos mostra como muitas vezes, dependendo do problema, a escolha de coordenadas adequadas faz toda a diferença! Mas obviamente não devemos acreditar que isto caiu do céu: há muito trabalho envolvido em achar as coordenadas corretas]. Nestas coordenadas, a equação da geodésica $ds^2 = 0$ para o fóton se movendo radialmente ($d\theta = d\varphi = 0$) vale então

$$\left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + 2 \frac{r_S}{r} c d\bar{t} dr + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 = 0, \quad (16.42)$$

que, dividida por $c^2 d\bar{t}^2$ nos leva à:

$$\left(1 + \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{dr}{cd\bar{t}}\right)^2 + 2 \frac{r_S}{r} \left(\frac{dr}{cd\bar{t}}\right) + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) = 0 \quad (16.43)$$

que nada mais é que uma equação de 2º grau para $dr/cd\bar{t}$. Temos duas raízes possíveis para esta equação, a saber:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)_{in} &= -c \\ \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)_{out} &= \frac{r - r_S}{r + r_S} c \end{aligned} \quad (16.44)$$

Notemos que quando $r_S = 0$ temos $(dr/d\bar{t})_{out} = c$ pois obviamente neste caso a métrica é plana e a velocidade do fóton deve valer c segundo a TER. Vamos buscar uma interpretação física destes resultados. Esta análise fica mais fácil de olharmos o comportamento do cone de luz do emissor de fótons que passa pela “horizonte de Schwarzschild” ou seja, a esfera de raio r_S . A imagem reproduz as propriedades da velocidade dos fótons dada pelas equações (16.44), representada pelas laterais externas do cone-de-luz: a lateral esquerda representa um fóton movendo-se em direção à r_S ao passo que a lateral direita representa

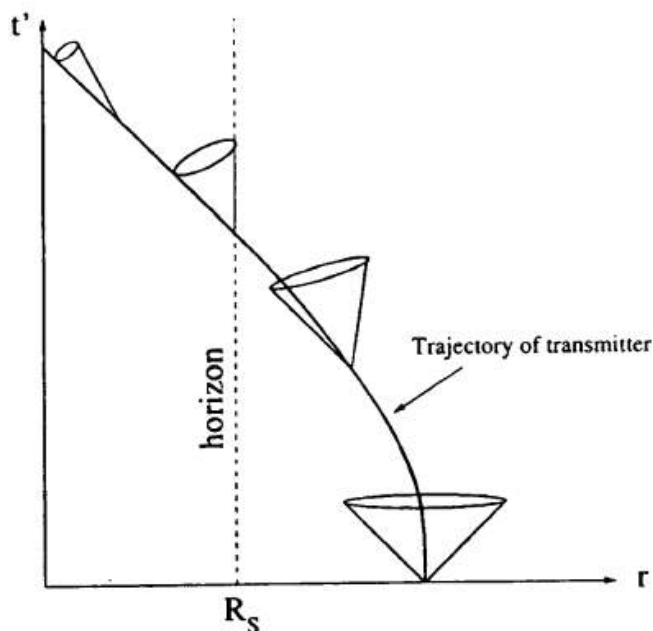


Figura 16.4: O comportamento do cone de luz de um emissor de fótons ao se aproximar do raio r_S ou *horizonte* de Schwarzschild. Fonte: Grøn e Næss.

um fóton se movendo para longe do horizonte. Devemos primeiro notar que o corte esquerdo do cone de luz (*ingoing photon*) sempre faz um ângulo de 45° com o eixo temporal pois segundo a 1ª equação em (16.44), a velocidade do fóton é sempre igual à $-c$, independente de sua posição r . Porém, a velocidade de um fóton que se afasta (*outgoing photon*) depende de r , como mostra a 2ª equação em (16.44) e portanto o corte do lado direito do cone faz um ângulo que, para $r \rightarrow \infty$ vale 45° mas que vai diminuindo à medida que nos aproximamos do horizonte. Exatamente na linha do horizonte $r = r_S$ o numerador desta equação se torna 0, o que significa que o fóton emitido para fora deste ponto, não conseguirá jamais sair para além de r_S . Nesta posição portanto, o corte direito do cone é paralelo ao eixo temporal.

Quando o emissor estiver em $r < r_S$, mesmo que emita um fóton na direção para fora, a velocidade do fóton será negativa e ele se moverá para dentro! Como todos os corpos materiais tem suas linhas de mundo sempre dentro do cone-de-luz, qualquer nave espacial ou partícula, uma vez passado o *event horizon*, não mais conseguirá escapar. Como para quem o observa de fora não é possível ver qualquer fóton saindo, o buraco se nos apresenta como um corpo perfeitamente negro.

16.8 As coordenadas de Kruskal-Szekeres

Há várias transformações que eliminam a singularidade da métrica de Schwarzschild. As transformações de Eddington-Finkelstein são na verdade um caso particular das transformações de Kruskal-Szekeres, pois elas se aplicam somente à parte do espaço de Schwarzschild, ao passo que as últimas são a extensão natural para todo o espaço. Discutiremos isto agora.

Nas transformações de Kruskal-Szekeres introduzimos as coordenadas v, u em substituição às coordenadas t, r . As coordenadas θ e ϕ da métrica de Schwarzschild permanecem inalteradas. As transformações são

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{r/r_S - 1} e^{\frac{r}{r_S}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right), & \text{se } r \geq r_S \\ v &= \sqrt{r/r_S - 1} e^{\frac{r}{r_S}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right), & \text{se } r \geq r_S \end{aligned} \quad (16.45)$$

ou

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - r/r_S} e^{\frac{r}{r_S}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right), & \text{se } r \leq r_S \\ v &= \sqrt{1 - r/r_S} e^{\frac{r}{r_S}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right), & \text{se } r \leq r_S \end{aligned} \quad (16.46)$$

É possível, após alguma álgebra, chegar à forma de Kruskal-Szekeres para ds^2 :

$$ds^2 = \frac{4r_S^3 e^{-\frac{r}{r_S}}}{r} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (16.47)$$

onde é importante lembrar que r na expressão acima não é mais uma coordenada mas uma função implícita de (r', t') segundo as equações (16.45) e (16.46). Para entender um pouco esta métrica, é importante chamarmos a atenção para um fato: ela tem a forma geral do tipo

$$ds^2 = f(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (16.48)$$

Nesta forma, fótons para os quais $ds^2 = 0$ e que se movem radialmente, isto é, $d\theta = d\phi = 0$, têm, seguem, segundo a expressão acima, as geodésicas

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1 \longrightarrow dv = \pm du \quad (16.49)$$

se $f(u, v) \neq 0$. Isto portanto significa que no gráfico (u, v) o cone de luz é sempre aberto, como na relatividade especial, e formado por retas que fazem um ângulo de 45° com os eixos. Notemos também que $f(u, v)$ só é nulo em $r \rightarrow \infty$ mas esta métrica não é apropriada para distâncias muito grandes pois ela não reproduz um espaço plano, como esperado,

neste limite. Neste sentido não temos que nos preocupar com o fato de $f(u, v)$ ser nulo pois no limite de aplicação desta forma da métrica, ele nunca é. Outra coisa muito importante é que a métrica só é singular em $r = 0$ e nada acontece em $r = r_S$. Isto torna particularmente útil para visualizar a geometria das coordenadas, o que faremos na próxima seção.

16.9 Discussão do resultado de Kruskal-Szekeres

Vamos tentar entender a física por trás destas variáveis. A primeira coisa que devemos notar é o fato que a região de Schwarzschild $r > r_S$, nossa conhecida, corresponde ao quadrante representado na figura ao lado. Isto segue se observarmos que as linhas de $r = const$ são representadas, no plano (u, v) , pelas hipérboles

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_S} - 1\right) e^{\frac{r}{r_S}} \tag{16.50}$$

Estas hipérboles se aproximam das retas $v = \pm u$ quando $r \rightarrow r_S$. Da mesma maneira, segundo

$$\frac{v}{u} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) \rightarrow v = \tanh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) u \tag{16.51}$$

as linhas de $t = const$ são retas que passam pela origem do eixo de coordenadas (u, v) (v. figuras ao lado)

É importante notar que quando $r = 0$ temos

$$v^2 - u^2 = 1 \rightarrow v = \pm(1 + u^2)^{\frac{1}{2}} \tag{16.52}$$

e portanto no gráfico KS há duas singularidades. Também a região $r > r_S$ corresponde à $u^2 \geq v^2$, ou seja

$$u \geq |v| \quad \text{ou} \quad u \leq -|v|. \tag{16.53}$$

Portanto, há no gráfico de KS para o espaço de Minkowski 2 regiões com singularidade $r = 0$ e duas regiões fora do buraco negro. Na figura abaixo representamos todo o diagrama do espaço-tempo nas variáveis de Kruskal-Szekeres com suas 4 diferentes regiões, que são explicadas a seguir em mais detalhes.

I. A primeira região para $r > r_S$ na figura acima representa o “nosso” universo. É importante notar que em todas as regiões, não apenas na I, devido à construção de Kruskal-Szekeres, os cones de luz são sempre delimitados por lados que fazem 45° com os eixos. Isto significa que a luz tem velocidade constante c não importa onde nos encontremos no espaço.

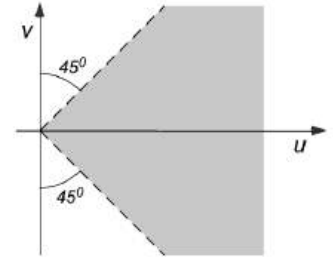


Figura 16.5: A região de Schwarzschild $r \geq r_S$ nas coordenadas (u, v) de Kruskal-Szekeres.

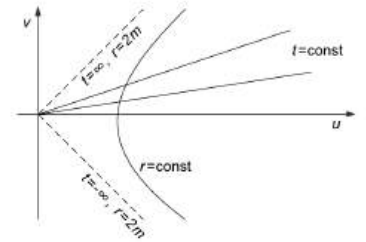


Figura 16.6: Hipérbolas de $r = const$ e retas de $t = const$ nas coordenadas (u, v) de Kruskal-Szekeres.

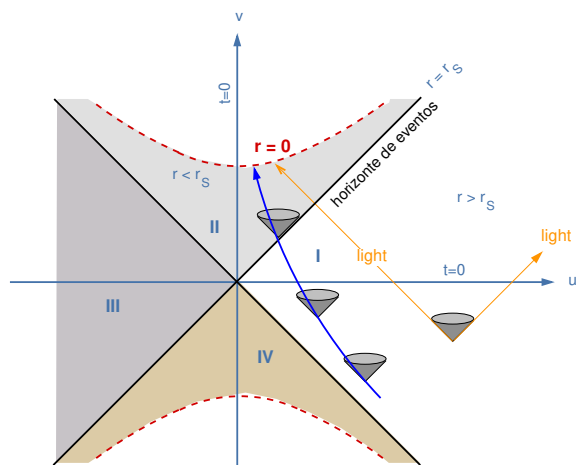


Figura 16.7: Espaço tempo de Schwarzschild nas variáveis de Kruskal-Szekeres. Há 4 regiões no espaço: a região I representa o nosso universo, fora do buraco negro. A região II é o interior do buraco negro. A região III seria um universo paralelo, ao qual não temos acesso por qualquer trajetória tipo-tempo ou tipo-luz. A região IV corresponde a um chamado *buraco branco*. Vide texto para uma explicação mais detalhada destas regiões.

- II. A região II corresponde ao interior do buraco negro, onde a linha mais escura fazendo um ângulo de 45 graus com os eixos u e v corresponde à $r = r_s$, ou seja o horizonte de eventos. Uma partícula, cuja trajetória tem uma componente de velocidade na direção do buraco negro, invariavelmente atinge a superfície do mesmo e uma vez dentro cai em direção à singularidade. O mesmo ocorre para um raio de luz emitido do lado de fora do buraco negro. Se ele foi emitido para longe, na direção de r crescente, ele se propagará indefinidamente para longe do buraco negro. Contudo, caso seja emitido na direção do buraco negro, ele passará pelo horizonte de eventos e não mais tem como retornar, caindo na singularidade. Note que qualquer trajetória tipo-tempo ou tipo-luz não tem como sair de dentro da região II e mesmo fótons emitos na direção oposta à singularidade acabam caindo nela.
- III. Esta região corresponde ao que alguns chamam de *universo paralelo* ou *anti-universo*. Não há comprovação que eles realmente existam pois mesmo que existissem, não há como informação deste universo passar para o nosso por qualquer linha de mundo tipo-tempo ou tipo-luz. Eles seriam assim inacessíveis à nossa observação.
- IV. Esta região corresponde ao chamado *buraco branco* associado ao buraco negro. Sua propriedade é que, diferente do buraco negro de onde nada escapa, o buraco branco nada retém. Não existe comprovação que a buracos negros estejam associados buracos brancos.

Uma outra representação bastante interessante é a dos diagramas de Penrose. Estes são discutidos na lista 4.

Ondas Gravitacionais

Discutiremos neste capítulo as ondas gravitacionais e suas principais propriedades na aproximação de campos fracos.

17.1 Introdução

As evidentes semelhanças entre a interação eletromagnética e a interação gravitacional nos leva a imaginar que as equações de Einstein que descrevem a gravidade têm também soluções na forma de ondas. Embora a detecção de ondas gravitacionais tenha ocorrido 100 anos após Einstein tê-las previsto, sua existência era um fato aceito pela comunidade científica: em 1979 Taylor, Fowler e Weisberg mediram as perdas de energia devido à radiação gravitacional previstas pela teoria no sistema binário PSR1913+16 ¹. A concordância entre a teoria e a medida derrimou eventuais dúvidas sobre sua existência. No entanto foram ainda necessárias 4 décadas para que uma detecção direta lograsse sucesso.

A dificuldade de uma detecção direta se deve ao fato que ondas gravitacionais são extremamente débeis. Apenas eventos cósmicos catastróficos, capazes de emitir uma quantidade descomunal de energia, são possíveis candidatos de detecção. As primeiras tentativas de se medir ondas gravitacionais em laboratórios foram aquelas segundo um método sugerido pelo físico americano J. Weber, na qual corpos massivos assimétricos e portanto com momentos de quadrupolo não nulos eram colocados em movimento ². A técnica de Weber se mostrou inviável em função da ordem de grandeza da amplitude das ondas geradas e da dificuldade de blindá-las de efeitos do ambiente externo. A detecção direta só foi possível a partir de experimentos interferométricos, que em 2016 detectaram as ondas geradas pela colisão de dois buracos negros de massa total de aproximadamente $65 M_{\odot}$.

Do ponto de vista formal, o tratamento de ondas gravitacionais é bastante complexo devido à não linearidade das Equações de Einstein. Uma das maneiras de contornar esta dificuldade, que será por nós aqui

¹ J. H. Taylor, L. A. Fowler and J. M. Weisberg, *Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913+16*, *Nature* 277 (1979), 437.

² J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Dover Publications Inc., Mineola, 1961, pp. 112.

adotada, é estudar o limite de campos fracos. Na prática isto significa linearizar as Equações de Einstein para obter uma equação de onda do tipo $\square_{\mu\nu} = (1/c^2)\partial^2 \Phi h_{\mu\nu} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = 0$, onde $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação de uma métrica plana Minkowskiana. A linearização das EEs significa também considerar ondas tão débeis que a energia e momento por elas transportadas são insuficientes para afetarem sua própria propagação. Em outras palavras, há um desacoplamento entre a onda e o efeito que ela causa sobre si mesma.

17.2 Poincaré, Einstein, Eddington e as ondas gravitacionais

Talvez o primeiro cientista a levantar a hipótese da existência de ondas gravitacionais foi matemático francês Henri Poincaré em 1905. Em um artigo acerca da teoria do elétron de Lorentz, segundo a qual a inércia dos corpos tinha origem eletromagnética, Poincaré afirma, ao comentar os resultados de Lorentz ³:

[...] Na obra citada, Lorentz julgou necessário complementar sua hipótese: todas as forças, quaisquer que sejam suas origens, são afetadas por uma translação da mesma maneira que as forças eletromagnéticas [...] É importante examinarmos esta hipótese mais detalhadamente e, em particular, estudar quais destas modificações somos obrigados a aportar para a lei da gravidade [...] cheguei primeiro à hipótese que a propagação da gravitação não é instantânea mas se dá à velocidade da luz. Isto parece contradizer um resultado obtido por Laplace que afirma que, se esta propagação não for instantânea, ela é ao menos muitas vezes mais rápida que a velocidade da luz [...] Quando falamos aqui da posição ou velocidade do corpo que exerce a atração, esta é a posição ou velocidade no momento no qual o *onda gravítica* parte do corpo; quando falamos da posição ou velocidade do corpo atraído, referimo-nos à posição ou velocidade no momento em que este é atingido pela onda gravítica emanada do outro corpo; é claro que o segundo instante é posterior ao primeiro.

Do ponto de vista teórico, a existência de ondas gravitacionais foi prevista por Einstein em dois artigos ⁴. No primeiro, como o próprio título indica (*Integração aproximada das equações de campo gravitacional*) o objetivo de Einstein era determinar uma solução aproximada de suas equações. Para isto ele tomou a métrica $g_{\mu\nu}$ e a aproximou de uma métrica plana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ acrescida de um termo perturbativo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{onde} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (17.1)$$

Esta aproximação acabou por mostrar a possibilidade de se obter uma equação de onda a partir das Equações de Campo de Einstein. Ciente deste fato, mas ainda não convencido da sua realidade, Einstein explorou mais detalhadamente a idéia em um segundo artigo em 1918. A

³H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences C. R. T. 140 (1905), pp. 1504–1508.

⁴A. Einstein, *Nährungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin 1/34 (1916), 688–696; *Über Gravitationswellen*, op. cit. 1/32 (1918), 154–167.

dúvida de Einstein advinha principalmente da conclusão que as ondas não transportavam energia. Esta dúvida foi reforçada por um artigo de Eddington em 1922⁵. Nele Eddington discutiu o fato que para chegar aos seus resultados Einstein havia usado um conjunto muito especial de coordenadas e que a velocidade de propagação era indefinida:

[...] acredito que Einstein deixou o problema sobre a velocidade de propagação sem solução [...] Seu resultado mostra que as coordenadas têm que ser escolhidas de maneira correta se quisermos que as ondas gravitacionais se propaguem com a velocidade da luz [ondas estas que] Weyl classificou em três tipos: (1) longitudinal-longitudinal; (2) longitudinal-transversal; (3) transversal-transversal. A presente investigação leva ao resultado que apenas as transversas-transversas se propagam com a velocidade da luz *em todos os sistemas de coordenadas*. As ondas do primeiro e do segundo tipo não têm uma velocidade fixa – um resultado que levanta suspeita acerca da sua existência. Einstein também suspeitou de sua existência (na medida em que elas surgem no seu sistema de coordenadas especial) mas por outro motivo: ele descobriu que elas não transportam energia. Elas não são reais e (do mesmo modo que a velocidade absoluta) não podem ser detectadas por qualquer experimento concebível. Elas nada mais são que sinuosidades do sistema de coordenadas, e a única velocidade de propagação relevante a elas é a “velocidade do pensamento”.⁶

Discutiremos melhor a frase final acerca de “sinuosidades das coordenadas” abaixo.

As ondas gravitacionais são consequência direta das Equações de Einstein. Elas representam perturbações no espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz quando as massas que geram os campos são aceleradas. Embora sua existência fosse já amplamente aceita pela comunidade científica desde o final dos anos 50, foi apenas no dia 11 de fevereiro de 2016 que a colaboração LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) anunciou a primeira detecção de uma onda gravitacional feita às 09:50:45 hs (GMT) no dia 14 de setembro do ano anterior. Esta onda foi o resultado da fusão de dois buracos negros com 29 e 36 M_{\odot} a aproximadamente 1.3 bilhões de anos-luz da Terra. Durante os momentos finais da fusão, por uma fração de segundos, a potência emitida foi de 50 vezes a potência emitida por todas as estrelas observáveis do Universo. O fato de ter levado tanto tempo para que uma onda fosse observada se deve ao fato que a variação do comprimento dos braços do interferômetro é da ordem de distâncias atômicas. Um ponto a considerarmos é que embora as ondas gravitacionais existam independentemente de qualquer aproximação que façamos nas Equações de Einstein, seu tratamento teórico se dá pela linearização destas pois neste caso podemos usar os resultados conhecidos do Eletromagnetismo e estimar valores e prever comportamentos. Elas não existem apenas enquanto aproximação linear.

⁵ A. S. Eddington, *The propagation of gravitational waves*, Proc. Roy. Soc. 85 (1922), 268 – 282.

⁶ Eddington refere-se aqui à uma conclusão de Einstein segundo o qual deveriam existir 3 tipos de ondas: longitudinal-longitudinal, transversal-longitudinal e transversal-transversal. Esse nome foi o usado por Weyl no seu clássico livro *Raum, Zeit, Materie*, p. 228 de 1919.

17.3 A linearização das Equações de Einstein

A obtenção de uma equação de onda a partir das Equações de Einstein não é particularmente difícil, embora exija um certo cuidado na interpretação dos resultados. A idéia é procurar soluções $g_{\mu\nu}$ das Equações de Einstein que se desviem pouco de uma métrica Minkowskiana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{onde} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (17.2)$$

e substituir esta aproximação nas EEs

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (17.3)$$

mantendo apenas os termos em primeira ordem em h . Basicamente isto significa expandir o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ em potências de h na forma

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (17.4)$$

onde $R_{\mu\nu}^{(k)}$ representa o termo de R na potência h^k ($R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$). Com isto tentaremos obter uma equação de onda onde apareça um termo da forma $\square h_{\mu\nu}$ onde

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_0^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (17.5)$$

Vamos partir assim da definição do tensor de curvatura de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho\nu}^\alpha &= \left(\Gamma_{\mu\nu|\rho}^\alpha - \Gamma_{\mu\rho|\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right), \\ R_{\mu\nu} &= R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

onde os símbolos de Christoffel, como já sabemos, valem ⁷

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\alpha\nu|\beta} + g_{\beta\nu|\alpha} - g_{\alpha\beta|\nu} \right). \quad (17.7)$$

Podemos, se assim preferirmos, escrever o tensor de Riemann diretamente como

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\mu|\beta|\nu} + g_{\beta\nu|\alpha|\mu} - g_{\beta\mu|\alpha|\nu} - g_{\alpha\nu|\beta|\mu} \right) \\ &\quad + g_{\lambda\kappa} \left(\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\kappa - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\beta\mu}^\kappa \right). \end{aligned} \quad (17.8)$$

Usando as definições na caixa acima temos finalmente

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(g_{\rho\sigma|\mu|\nu} + g_{\mu\nu|\rho|\sigma} - g_{\mu\sigma|\rho|\nu} - g_{\rho\nu|\mu|\sigma} \right) \\ &\quad + g^{\rho\sigma} g_{\lambda\kappa} \left(\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\kappa - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa \right). \end{aligned} \quad (17.9)$$

⁷ Estamos usando aqui a notação segundo a qual $g_{\mu\nu|\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$ e também $g_{\mu\nu|\alpha|\beta} = g_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$.

Para que possamos linearizar as EEs temos que primeiramente determinar quais potências de h surgem das definições acima. Notamos primeiramente que o termo Minkowskiano $\eta_{\mu\nu}$ em $g_{\mu\nu}$ tem derivada nula e portanto

$$g_{\mu\nu|\alpha} = \eta_{\mu\nu|\alpha} + h_{\mu\nu|\alpha} = h_{\mu\nu|\alpha}. \quad (17.10)$$

Isto significa que o produto do g com suas derivadas, segundo a definição dos $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, tem no mínimo termos de ordem $\mathcal{O}(h)$. Isto implica que o termo em $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ que envolve o produto dos símbolos de Christoffel é da forma

$$\Gamma \times \Gamma = \mathcal{O}(h^2) + \text{termos de ordem mais alta em } h \quad (17.11)$$

e portanto podemos desprezar sua contribuição ao tensor de Riemann. Sendo assim, podemos reescrever o tensor de Riemann, após um pouco de álgebra nos índices, como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\mu|\beta|\nu} + g_{\beta\nu|\alpha|\mu} - g_{\beta\mu|\alpha|\nu} - g_{\alpha\nu|\mu|\beta} \right) \quad (17.12)$$

ou, considerando a equação (17.10), ficamos com

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(h_{\alpha\mu|\beta|\nu} + h_{\beta\nu|\alpha|\mu} - h_{\beta\mu|\alpha|\nu} - h_{\alpha\nu|\mu|\beta} \right) \quad (17.13)$$

Da relação $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$ temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho(1)} &= g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}^{(1)} = \left(\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho} \right) R_{\lambda\mu\rho\nu}^{(1)} \\ &= \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}^{(1)} + \underbrace{h^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}^{(1)}}_{=\mathcal{O}(h^2)} \\ &\approx \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}^{(1)}. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Substituindo agora na expressão acima a equação (17.13) temos

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(h_{\lambda\rho|\mu|\nu} + h_{\mu\nu|\lambda|\rho} - h_{\mu\rho|\lambda|\nu} - h_{\lambda\nu|\rho|\mu} \right)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \eta^{\lambda\rho} h_{\rho\kappa} &= h_{\kappa}^{\lambda}, \\ h_{\mu\nu} &= h_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (17.15)$$

obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(h_{\lambda\rho|\mu|\nu} + h_{\mu\nu|\lambda|\rho} - h_{\mu\rho|\lambda|\nu} - h_{\lambda\nu|\rho|\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(h_{\rho|\mu|\nu}^{\rho} + \underbrace{h_{\mu\nu|\rho|\rho}}_{=\partial^{\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu}} - h_{\mu|\rho|\nu}^{\rho} - h_{\nu|\rho|\mu}^{\rho} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} + h_{\rho|\mu|\nu}^{\rho} - h_{\mu|\rho|\nu}^{\rho} - h_{\nu|\rho|\mu}^{\rho} \right) \end{aligned} \quad (17.16)$$

Em função de nossa aproximação (17.10), as coordenadas usadas são quase Minkowskianas, de tal maneira que podemos introduzir o operador D'Alembertiano

$$\partial^\rho \partial_\rho = \square + \mathcal{O}(h). \quad (17.17)$$

Usando agora este resultado podemos escrever as Equações de Campo de Einstein linearizadas:

$$\square h_{\mu\nu} + h_{\rho|\mu|\nu}^\rho - h_{\mu|\rho|\nu}^\rho - h_{\nu|\rho|\mu}^\rho = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (17.18)$$

17.4 A transformação de calibre

As equações (17.18) para as componentes $h_{\mu\nu}$ são acopladas, ou seja, misturam componentes. De maneira semelhante ao Eletromagnetismo, é possível fazer uma mudança de coordenadas que leve os três termos a se cancelarem mutuamente, desacoplando as componentes, ou seja, que obtenhamos uma equação com fontes da forma

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right). \quad (17.19)$$

A necessidade de termos que escolher uma transformação de coordenadas para nos livrarmos dos termos acoplados foi o ponto criticado por Eddington, como discutido na introdução deste capítulo. Antes de discutirmos o significado físico desta mudança, vamos procurar as transformações de calibre que levam ao desaparecimento dos termos acoplados. Uma vez que a métrica, como ponto de partida, é praticamente Minkowskiana pois $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, podemos fazer uma transformação do tipo

$$x^\mu \quad \longrightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (17.20)$$

com ϵ^μ pequeno. A representação contravariante do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ se transforma, como bem o sabemos, segundo

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} g^{\lambda\kappa} \quad (17.21)$$

e disto podemos deduzir a regra de transformação de $h^{\mu\nu}$. Devemos porém tomar um cuidado, pois

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (17.22)$$

ou seja, há uma troca de sinal em relação à $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Isto se explica pelo fato que $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$. Portanto

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} &= (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})(\eta_{\lambda\nu} + h_{\lambda\nu}) \\ &= \eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} + (\eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} - \eta_{\lambda\nu} h^{\mu\lambda}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + (h_\nu^\mu - h_\nu^\mu) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (17.23)$$

e portanto em primeiro ordem em h a identidade $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ é satisfeita. Uma vez que

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \delta_{\lambda}^{\mu} + \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \quad (17.24)$$

podemos substituir este resultado em (17.22) e escrever

$$\eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} = \left(\delta_{\lambda}^{\mu} + \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \left(\delta_{\kappa}^{\nu} + \frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) (\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}) \quad (17.25)$$

de onde concluímos que

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x_{\mu}}. \quad (17.26)$$

Analogamente vale

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (17.27)$$

Estas transformações são o análogo às transformações de calibre para os potenciais \mathbf{A} e ϕ da Eletrodinâmica. Na Eletrodinâmica elas estão relacionadas ao fato que as Equações de Maxwell não determinam \mathbf{A} e ϕ de maneira unívoca (vide texto ao final do capítulo para uma recapitulação das transformações de calibre na Eletrodinâmica). O que esta analogia significa na TRG e de onde ela vem?

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R$ que aparece nas Equações de Einstein tem 10 componentes independentes, o que significa que as EE são 10 equações algebricamente independentes. A princípio elas seriam suficientes – junto com condições de contorno apropriadas – para nos dar uma solução unívoca para as 10 componentes $g_{\mu\nu}$. Porém, devido à conservação de momento e energia, as 10 componentes de $G_{\mu\nu}$ estão relacionadas entre si pelas 4 identidades de Bianchi:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (17.28)$$

e portanto ao invés de 10 equações independentes, temos apenas $10 - 4 = 6$ equações. Isto significa que temos 4 graus de liberdade na determinação dos 10 $g_{\mu\nu}$. Isso reflete o fato que se tivermos uma solução $g_{\mu\nu}$, então $g'_{\mu\nu}$ também é solução, onde $g'_{\mu\nu}$ é obtida a partir dos $g_{\mu\nu}$ por uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$. Como uma transformação de coordenadas envolve 4 funções arbitrárias $x'^{\mu}(x)$, temos 4 graus de liberdade e podemos “escolher” uma transformação de modo a fixar as 4 componentes $g_{\mu\nu}$ segundo nossa conveniência.

São justamente estas quatro funções $\epsilon^{\mu}(x)$ acima que nos dão a liberdade de as escolhermos de maneira a cancelar os termos acoplados na Equação de Einstein linearizada. A escolha apropriada neste caso é o chamado [sistema de coordenadas harmônico](#)⁸, isto é aquele para o

⁸ Para uma explicação do porquê este sistema de coordenadas é chamado de harmônico, vide o livro de S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972, pp 162 - 163.

qual temos

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0. \quad (17.29)$$

Usando a definição dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ na expressão acima somos levados à

$$2h_{\nu|\mu}^{\mu} = h_{\mu|\nu}^{\mu} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (17.30)$$

Esta condição é comumente chamada na literatura especializada de calibre de *Einstein*, de *de Donder*, de *Hilbert* ou de *Fock*. Quando substituímos esta expressão em (17.18) obtemos finalmente as [equações de campo de Einstein linearizadas e desacopladas](#):

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (17.31)$$

Equações de Einstein Linearizadas

Se nos recordarmos das equações de campo da Eletrodinâmica relativística para o quadripotencial $A^{\mu} = (\Phi/c, \mathbf{A})$ e quadricorrente $j^{\mu} = (\rho c, \mathbf{j})$

$$\square A^{\mu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad (17.32)$$

vemos que a estrutura das Equações de Einstein linearizadas é a mesma. Isto nos permite usar os resultados conhecidos da Eletrodinâmica para nos guiarmos nos estudo de ondas gravitacionais. Um dos resultados que podemos usar diretamente é que as EEs linearizadas têm soluções em termos de potenciais retardados da forma:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3r' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (17.33)$$

onde

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu}. \quad (17.34)$$

Com isto podemos agora estudar algumas das características destas ondas.

17.5 Um detalhe importante da linearização

A versão homogênea da equação de onda (19.1)

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (17.35)$$

é válida apenas para um tipo de coordenadas, ou seja, naquele para o qual o calibre de Einstein (17.30) é satisfeito:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} h \right) = 0. \quad (17.36)$$

Hilbert mostrou que para campos arbitrariamente fracos é sempre possível achar sistemas de coordenadas nos quais esta condição é satisfeita ⁹. Contudo, na Relatividade Geral, sistemas de coordenadas são arbitrários e portanto sempre podemos escolher um no qual a condição não é satisfeita. É neste sentido que Eddington criticou a solução de Einstein, que seria válida apenas para um sistema de coordenadas especial. Fisicamente falando, a consequência destas transformações é que às ondas gravitacionais se somam efeitos não inerciais devido ao movimento do novo referencial representado por variáveis arbitrárias, o que dificultaria ainda mais sua detecção ¹⁰.

Para diferenciarmos entre ondas gravitacionais e perturbações devido à arbitrariedade do sistema de coordenadas, devemos olhar para uma quantidade que permaneça invariante por transformações infinitesimais do sistema de coordenadas, isto é de $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$. Por sorte o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ tem justamente esta propriedade, ou seja, ele é invariante por mudanças arbitrárias da métrica. Em outras palavras o tensor de Riemann obedece

$$\square R_{\mu\nu\sigma\tau} = 0 \quad (17.37)$$

e portanto as perturbações de $h_{\mu\nu}$ que satisfazem a equação de onda e se propagam com velocidade c representam perturbações reais do tensor de Riemann (da curvatura) como demonstrou Eddington em 1925 ¹¹. Consequentemente ondas gravitacionais reais são observadas em qualquer sistemas de coordenadas e não são um mero artifício matemático decorrente das “sinuosidades da métrica” às quais Eddington se referiu no texto citado no início deste capítulo. Estas “perturbações” gravitacionais devido à arbitrariedade das transformações de coordenadas podem se propagar a qualquer velocidade e não tem existência real. Elas não são perturbações da métrica do espaço, apenas um resultado matemático desprovido de sentido físico.

17.6 Um outro detalhe importante da linearização

Estamos interessados aqui em estudar as ondas gravitacionais no vácuo, ou seja, na eq. (19.1) consideraremos o termo da fonte como sendo nulo. Porém é importante lembrarmos uma questão física muito relevante associada à definição do tensor energia-momento. A lei de conservação de energia e momento é expressa na forma do divergente covariante de $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu}_{||\nu} = 0 \quad (17.38)$$

Com esta equação determinamos como a distribuição de massa e energia se relaciona com a métrica. Isto fica claro se nos lembrarmos da

⁹ D. Hilbert, *Göttingen Nachrichten, Math. Annalen* 92 (1917).

¹⁰ Ya. B. Zeldovich and I. D. Novikov, *Stars and Relativity*, Dover Publications Inc., Mineola, 1971, pp. 40 ff.

¹¹ A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1925.

definição da derivada covariante:

$$T_{||\nu}^{\mu\nu} = T_{|\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} T^{\lambda\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} T^{\lambda\nu}. \quad (17.39)$$

Porém, como mostrado no apêndice ??, vale

$$T_{|\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} T^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \right), \quad (17.40)$$

e portanto o divergente se torna

$$T_{||\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \right) + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} T^{\lambda\nu} = 0. \quad (17.41)$$

O que é importante notar nesta equação é que ela nos mostra claramente que a distribuição de massa depende da métrica, que por sua vez depende da distribuição de massa. Em outras palavras, há uma interação da matéria consigo mesma. Quanto linearizamos as Equações de Einstein, devemos linearizar também a equação da continuidade, que basicamente se torna

$$T_{||\nu}^{\mu\nu} = T_{|\nu}^{\mu\nu} \quad (17.42)$$

ou seja, a derivada covariante se torna uma derivada parcial pois estamos aproximando o espaço curvo de um espaço de Minkowski. Por uma questão de coerência temos que expandir também o termo da fonte na direita da Equação de Einstein, isto é

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} &= \left(T_{\mu\nu} |_0 + \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial h_{\alpha\beta}} \Big|_0 h_{\alpha\beta} + \dots \right) \\ &- \frac{1}{2} \left(T |_0 + \frac{\partial T}{\partial h_{\alpha\beta}} \Big|_0 h_{\alpha\beta} + \dots \right) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (17.43)$$

e manter apenas os termos em ordem 0 que são os termos condizentes com a equação de continuidade. Isto significa, em termos físicos, desacoplar a matéria da métrica completamente. Portanto, *na teoria de Einstein linearizada desaparece a interação da matéria com seu próprio campo*. Como consequência, quaisquer resultados que obtemos da equação de ondas gravitacionais deve ser interpretado com cuidado. É certo que podemos aproximar soluções exatas das Equações de Einstein por soluções linearizadas naquelas regiões do espaço onde a métrica pode ser considerada aproximadamente plana. Isto não implica no entanto que uma solução da equação linearizada seja obrigatoriamente o limite fraco de uma solução exata, pois mesmo quando as massas que geram os campos são tão pequenas que a aproximação linear valha próximo da massa, estas soluções podem ser muito diferentes da solução exata

pela desacoplamento da massa com seu campo e dos movimentos que daí podem resultar. Podemos apenas nos basear com segurança nos resultados das equações linearizadas quando o movimento das massas é bastante conhecido, como por exemplo no nosso sistema solar. Embora como dissemos não nos preocuparemos com estas questões pois estudaremos as soluções das equações de onda homogênea, é importante termos uma noção das aproximações feitas.

17.7 Ondas planas

Vamos iniciar nossa discussão entendendo quantas componentes de onda independentes temos na equação

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (17.44)$$

A priori o tensor $h_{\mu\nu}$ tem 16 componentes, mas devido à simetria da métrica temos que $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ e portanto temos apenas 10 valores independentes entre si. As 4 equações de transformação de calibre por nós usadas, que se resumem à

$$2h^{\mu}_{\nu|\mu} = h^{\mu}_{\mu|\nu} \quad (17.45)$$

reduz o número de componentes independentes para 6 (é possível ainda reduzir mais o número de componentes para 2, como veremos adiante). Introduzimos a solução das equação de onda gravitacional na forma de ondas planas

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(-ik_{\lambda} x^{\lambda}) + c.c. \quad (17.46)$$

onde ¹²

$$\begin{aligned} k^2 &= k^{\lambda} k_{\lambda} = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \\ \rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} &= k^2 \end{aligned} \quad (17.47)$$

onde $k = |\mathbf{k}|$. As amplitudes $a_{\mu\nu}$ formam o chamado *tensor de polarização*. Se substituirmos a condição de calibre eq. (17.45) na solução de onda obtemos

$$2k_{\mu} \eta^{\mu\rho} a_{\rho\nu} = k_{\nu} \eta^{\mu\rho} a_{\rho\mu} \quad (17.48)$$

Estas equações relacionam as componentes do tensor de polarização $a_{\mu\nu}$ (simétrico) entre si. Por uma questão de simplicidade vamos escolher a direção de propagação como sendo a direção $x^3 = z$, ou seja

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp[ik(x^3 - ct)] + c.c. \quad (17.49)$$

ou, se preferirmos

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos[k_z z - \omega t + \varphi] \quad (17.50)$$

¹² Esta condição é análoga ao eletromagnetismo e é obtida substituindo a solução $\exp(k_{\alpha} x^{\alpha})$ na equação de onda.

As componentes do vetor de onda são portanto

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_0 = -k_3 = k_z = \frac{\omega}{c} \quad (17.51)$$

e as condições do calibre impõe, para $\nu = 0, 1, 2, 3$ que

$$a_{00} + e_{30} = (a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33})/2 \quad (17.52)$$

$$a_{01} + a_{31} = 0 \quad (17.53)$$

$$a_{02} + a_{32} = 0 \quad (17.54)$$

$$a_{03} + a_{33} = -(a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33})/2 \quad (17.55)$$

Estas 4 equações nos mostram que o tensor de polarização tem 6 componentes independentes de um total de 10, uma para cada $h_{\mu\nu}$. Tomemos estas como sendo então as amplitudes

$$a_{00}, a_{11}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}. \quad (17.56)$$

Com estas 6 componentes podemos determinar as 4 restantes:

$$a_{01} = -a_{31}, \quad a_{02} = -a_{32}, \quad a_{03} = -\frac{a_{33} + a_{00}}{2}, \quad a_{22} = -a_{11}. \quad (17.57)$$

É possível ainda reduzir este número para apenas 2 grandezas independentes. O porquê disto está simplesmente relacionado ao fato que as ondas gravitacionais são transversais, isto é, não tem componentes na direção de propagação z . Como há 2 direções independentes (x e y) qualquer onda pode ser decomposta em duas polarizações linearmente independentes. Com um pouco de álgebra podemos finalmente reduzir este resultado para a forma

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{xx} & a_{xy} & 0 \\ 0 & a_{xy} & -a_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp i [k_z z - \omega t] + c.c. \quad (17.58)$$

Qual o significado deste resultado? Lembrando que temos agora uma solução para a métrica no espaço-tempo aproximadamente Minkowskiano da forma

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{xx} - 1 & f_{xy} & 0 \\ 0 & f_{xy} & -f_{xx} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$f_{xx} = a_{xx} \cos(k_z z - \omega t + \varphi), \quad f_{xy} = a_{xy} \cos(k_z z - \omega t + \psi). \quad (17.59)$$

Em outras palavras, o elemento de linha se torna

$$ds^2 = [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(z, t)] dx^\mu dx^\nu \quad (17.60)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (1 - f_{xx}) dx^2 - 2f_{xy} dx dy - (1 + f_{xx}) dy^2 - dz^2$$

Fisicamente isto corresponde a uma distorção do espaço tempo, a uma frente de onda, que se propaga com a velocidade da luz e que vai provocar, em qualquer objeto que esteja na sua frente, um *alongamento* nas direções perpendiculares ao movimento da onda (no caso, nas direções x e y).

Vamos estudar o movimento partículas livres que se encontram neste campo gravitacional e que portanto a equação de movimento é dada pela equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (17.61)$$

onde os símbolos de Christoffel são calculados a partir da métrica por nós encontrada como solução do problema. Porém, se lembrarmos da definição

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) + \mathcal{O}(h^2) \quad (17.62)$$

segue que

$$\Gamma_{00}^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (17.63)$$

E portanto, tomando a condição inicial $\dot{x}^i(\tau = 0) = 0 = dx^i/d\tau = 0$, a equação

$$\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right)_{\tau=0} = -\Gamma_{\mu\nu}^i \dot{x}^\mu(0) \dot{x}^\nu(0) = -\Gamma_{00}^i \dot{x}^0(0) \dot{x}^0(0) = 0 \quad (17.64)$$

Uma vez que a aceleração é nula, estando as partículas inicialmente em repouso, elas assim permanecerão, isto é

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad \text{ou seja} \quad x^i(\tau) = \text{const.} \quad (17.65)$$

Ou seja, partículas no campo gravitacional da onda tem suas coordenadas constantes. Isto não significa porém que as partículas não se movam, pois embora não tenham velocidade, suas posições relativas mudam pois a métrica tem uma dependência temporal. Para entendermos o movimento de uma partícula com a passagem desta onda, imaginemos um grupo delas posicionadas no plano $x - y$ ao longo do perímetro de um círculo como na figura abaixo. Podemos descrever a métrica na forma mais conveniente

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 - dz^2 \quad (17.66)$$

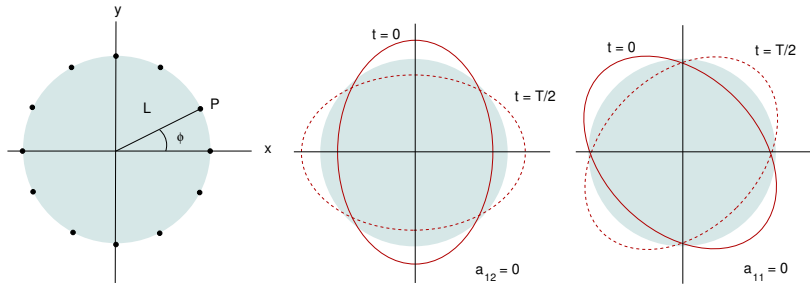


Figura 17.1: Movimento de partículas num campo gravitacional que se propaga na direção perpendicular ao plano da página.

onde o elemento da métrica no plano $x - y$ vale

$$dl^2 = [\delta_{mn} - h_{mn}(t)] dx^m dx^n \quad (17.67)$$

onde aqui representamos por $h_{mn}(t) = h_{mn}(z = 0, t)$ a parte da matriz (h_{mn}) dada por

$$(h_{mn}(z = 0, t)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (17.68)$$

Vamos entender como a posição de uma partícula P (vide figura) muda com o tempo. Segundo as equações mostramos que suas coordenadas são fixas. Uma vez que a métrica $h_{\mu\nu}$ não depende de x ou de y , podemos substituir no lugar de dx^m a coordenada x_p^m do ponto e escrever sua distância ρ à origem como

$$\rho^2 = [\delta_{mn} - h_{mn}(t)] x_p^m x_p^n \quad (m, n = 1, 2) \quad (17.69)$$

A posição de um partícula é determinada pelo ângulo ϕ da sua posição, isto é

$$x_p = L \cos \phi \quad y_p = L \sin \phi \quad (17.70)$$

Substituindo nesta expressão as relações (17.68) e (17.69) obtemos

$$\rho^2 = L^2 \cdot \begin{cases} [1 - 2a \cos(2\phi) \cos(\omega t)] & (a_{11} = a, a_{12} = 0) \\ [1 - 2a \sin(2\phi) \cos(\omega t)] & (a_{12} = a, a_{11} = 0) \end{cases} \quad (17.71)$$

Para que tenhamos uma idéia, o desvio percentual

$$\delta = \frac{|\rho - L|}{L} \quad (17.72)$$

para o sistema binário ι -Boötis¹³ vale $\delta = 10^{-20}$. Neste sentido a ilustração é meramente esquemática pois o efeito é imperceptível a menos que – caso estejamos usando interferometria – o braço do interferômetro seja extremamente longo. Contudo, para melhor entender isto, é necessário discutirmos a energia, momento e estimar o efeito que as ondas gravitacionais têm sobre corpos que estejam no seu caminho.

¹³ A estrela conhecida por *Asellus Secundus* literalmente “o segundo burrinho”.

17.8 Energia e momento das ondas gravitacionais

As equações de Einstein podem ser escritas na forma apresentada no início deste capítulo ou na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (17.73)$$

Como sabemos o tensor de Ricci possui derivadas de segunda ordem em g , isto é $\partial^2 g_{..}/\partial x^i \partial x^j$ e termos quadráticos no produto das derivadas primeiras de g , ou seja $(\partial g_{..}/\partial x^i)(\partial g_{..}/\partial x^j)$. Como discutido, para campos fracos podemos expandir o lado esquerdo da equação (17.73) em potências de $h_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + (\text{termos lineares em } h)}_{= R_{\mu\nu}^{(1)} - R^{(1)} \eta_{\mu\nu} / 2} + \frac{\partial h_{..}}{\partial x^i} \frac{\partial h_{..}}{\partial x^j} + \dots \quad (17.74)$$

Desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ e depois de uma transformação de coordenadas chegamos à equação de onda linearizada (19.1). As ondas planas discutidas na seção anterior são soluções homogêneas desta equação. Tomemos agora os termos quadráticos na equação acima e os coloquemos do lado direito da equação:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - R^{(1)} \eta_{\mu\nu} / 2 = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{c^4}{8\pi G} \frac{\partial h_{..}}{\partial x^i} \frac{\partial h_{..}}{\partial x^j}}_{= t_{\mu\nu}^{grav}} \right) \quad (17.75)$$

A grandeza $t_{\mu\nu}^{grav}$ é quadrática nos campos gravitacionais e se adiciona ao tensor energia-impulso $T_{\mu\nu}$ que contém todos os termos não gravitacionais da energia ¹⁴. Portanto a grandeza $t_{\mu\nu}^{grav}$ é o chamado tensor energia-momento do campo gravitacional. Para ondas planas, é fácil ver que

$$\frac{\partial h_{..}}{\partial x^\lambda} \propto a k_\lambda \quad (17.76)$$

onde a é a amplitude da onda gravitacional (os a_{ij} da seção anterior). A menos de fatores numéricos segue então que

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{c^4}{8\pi G} k_\mu k_\nu a^2 \quad (17.77)$$

sendo que para uma onda linearmente polarizada este resultado é exato.

Para um tensor $T_{\mu\nu}$ geral a lei de conservação de energia é dada pela equação $\partial^\mu T_{0\mu} = 0$. Como a métrica é quase Minkowskiana isto pode ser expresso na forma

$$\frac{\partial T_{00}}{\partial t} + \nabla \cdot (c T_{0i} \mathbf{e}^i) = 0 \quad (17.78)$$

¹⁴ Massa, momento e formas de energia não gravitacionais.

Esta equação nos diz que T_{00} é a densidade de energia e $c T_{0i}$ a densidade de fluxo de energia. Apenas para que nos lembremos, no caso do campo eletromagnético temos

$$T_{00}^{em} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \quad \begin{array}{l} \text{(densidade de energia} \\ \text{do campo eletromagnético)} \end{array}$$

$$\mathbf{S} = c T_{0i}^{em} \mathbf{e}^i = \frac{c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{4\pi} \quad \text{(vetor de Poynting)}$$

Uma onda plana na direção z tem o vetor de onda $(k^\mu) = (\omega/c, 0, 0, \omega/c)$. A densidade de fluxo de energia Φ_{OG} da onda gravitacional (equivalente ao vetor de Poynting do eletromagnetismo) vale

$$\Phi_{OG} = \frac{\text{energia}}{\text{tempo} \cdot \text{área}} = c t_{03}^{grav} = \frac{c^5}{8\pi G} k_0 k_3 a^2 = \frac{c^3}{8\pi G} \omega^2 a^2$$

Relação entre amplitude e potência/área da onda gravitacional

(17.79)

Esta é a energia que é transportada na direção da propagação \mathbf{k} por unidade de tempo e de área.

17.9 Quadrupolos gravitacionais

Na expressão deduzida acima temos a frequência angular ω da onda gravitacional. A pergunta que devemos nos fazer é: qual a origem desta frequência e a qual movimento ela se refere? Não é nossa intenção aqui detalhar exatamente os cálculos e demonstrar as fórmulas para estimarmos os possíveis valores de ω para possíveis distribuições de massa oscilantes. Alguns livros desenvolvem estes cálculos mais detalhadamente, com especial destaque para o livro do Weinberg. Uma outra boa fonte, muito detalhada, é o artigo de revisão de Kip Thorne¹⁵. Vamos nos restringir aqui a alguns argumentos físicos gerais baseados um pouco na nossa intuição física da Eletrodinâmica.

Uma distribuição de carga oscilante (frequência ω) que tenha um momento de dipolo p diferente de zero emite energia na forma de ondas eletromagnéticas com uma potência

$$P = \frac{\omega^4}{3c^3} p^2 \quad (17.80)$$

¹⁵ K. Thorne, *Multipole Expansions of Gravitational Radiation*, Rev. Mod. Phys. 52/2 (1980), pp. 299 - 339.

onde p é o momento de dipolo da distribuição. Distribuições mais gerais têm, no entanto, multipolos de ordem mais alta. Monopolos elétricos têm um potencial que cai como $\Phi^{(1)} \sim 1/r$, seguidos da contribuição de dipolo $\Phi^{(2)} \sim 1/r^2$ e quadripolos $\Phi^{(3)} \sim 1/r^3$. Os quadripolos Q_{ij} , que em coordenadas cartesianas têm a forma

$$Q_{ij} = \int \rho_e(\mathbf{x}) (3x^i x^j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) d\mathbf{x} \quad (17.81)$$

emitem energia com uma potência dada por¹⁶:

$$P = A \frac{\omega^6}{c^5} \sum_{i,j} |Q_{ij}|^2 \quad (17.82)$$

onde A é um fator numérico que depende da geometria do problema. Distribuições de massa não são diferentes, com alguma óbvias modificações: elas não têm momento de dipolo pelo simples fato que massas negativas não existem. Porém, se a distribuição de massa apresentar alguma anisotropia, com no caso de um planeta que gira em torno de seu eixo e portanto é oblato, ou tivermos um sistema binário que gira em torno do centro de massa comum, o momento de quadripolo de massa é diferente de zero. Se o corpo é dotado de movimento, sua métrica exterior será dependente do tempo e portanto ele emitirá radiação gravitacional¹⁷. Isto significa que todos os astros perdem energia na forma de radiação gravitacional. O primeiro termo de correção ao potencial central $\Phi = -GM/r$ é o termo devido ao momento de quadripolo gravitacional, que é definido exatamente como no caso elétrico

$$Q_{ij} = \int \rho (3x^i x^j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) d\mathbf{x}. \quad (17.83)$$

onde porém substituímos a densidade de carga ρ_e pela de massa $\rho = T^{00}/c^2$. A solução exata para a potência de radiação gravitacional emitida por uma distribuição de massa oscilante vale¹⁸

$$P = \frac{2G\omega^6}{5c^4} \left(\sum_{i,j=1}^3 |Q_{ij}|^2 - \frac{1}{3} \left| \sum_{i=1}^3 Q_{ii} \right|^2 \right) \quad (17.84)$$

Potência emitida por massa oscilante

Nós só devemos estar atentos pois normalmente os livros de Relatividade Geral definem o momento de quadripolo na forma

$$Q_{ij} = \int \rho x^i x^j d\mathbf{x}. \quad (17.85)$$

Esta forma é diferente da forma normalmente adotada no Eletromagnetismo, a chamada de forma com traço nulo ($Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$).

¹⁶ J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd. edition, John Wiley and Sons, 1998, pp. 429-437.

¹⁷ Em termos clássicos traduzimos isto dizendo que o planeta gera, pela rotação, um potencial gravitacional que cai com uma potência r^3 . No caso de satélites em órbita, estes efeitos são relevantes.

¹⁸ Weinberg, *op. cit.*, p. 268; T. Fließbach, *op.cit.*, p. 196. O cálculo exato é apresentado no apêndice E

Livros de Relatividade normalmente adotam a forma com traço (17.85). A diferença entre as duas é que a primeira permite representar a expansão do potencial em termos dos harmônicos esféricos $Y_m^l(\theta, \phi)$, que são as funções de base da representação irredutível do grupo de rotação $SO(3)$ em 3 dimensões. A forma com traço é computacionalmente mais eficiente e por este motivo muitas vezes preferida.

Vamos estudar agora alguns exemplos e emissores de ondas gravitacionais. Os exemplos por nós discutidos serão:

- (a) Barra rígida: este exemplo é mais de interesse acadêmico pois uma barra rígida que gire em torno do seu centro de massa emite ondas gravitacionais e que poderiam ser detectadas num laboratório. Como veremos elas são porém extremamente débeis para que possam ser detectadas.
- (b) Duas massas a uma distância fixa r e que giram em torno do centro de massa. Este modelo é importante pois pode ser usado para escrever estrelas binárias, que são uma fonte contínua de emissão de ondas gravitacionais e fortes candidatas para a comprovação da existência destas ondas.
- (c) Pulsares.

17.10 Corpo rígido girante

Todos os exemplos que veremos abaixo são de corpos rígidos que executam um movimento de rotação, seja ele orbital ou em torno do próprio eixo. O resultado geral aqui deduzido será então utilizado em cada um dos casos particulares.

Imaginemos um sistema de coordenadas S' associado ao corpo, e cujas coordenadas são x'_j . Neste referencial, a densidade de massa $\rho'(\mathbf{x}')$ não depende do tempo. Por definição, o momento de quadrupolo de massa deste corpo vale

$$\Theta' = (\Theta_{ij}) = \left(\int \rho'(\mathbf{x}') x'^i x'^j d\mathbf{x}' \right) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (17.86)$$

onde I são os momentos de inércia em relação aos eixos principais. Num sistema de coordenadas S parado no qual o corpo gira com velocidade angular constante Ω , em torno do eixo $x_3 = x'_3$, as coordenadas x_i se relacionam com as coordenadas-próprias x'_i via

$$x_n = \alpha_n^m(t) x'_m \quad (17.87)$$

onde

$$\alpha(t) = (\alpha_n^m) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.88)$$

No sistema inercial S o momento de quadrupolo Θ_{ij} é dado por

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(t) &= \int \rho(\mathbf{x}) x^i x^j d\mathbf{x} = \int \rho'(\mathbf{x}') [\alpha_i^n x'^n] [\alpha_j^m x'^m] d\mathbf{x}' \\ &= \alpha(t) \Theta' \alpha(t)^T \end{aligned} \quad (17.89)$$

onde usamos o fato que pela transformação a densidade de massa e elemento de volume comportam-se como escalares, ou seja $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho'(\mathbf{x}')$ e $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}'$. Substituindo na expressão acima o valor de Θ' e das matrizes $\alpha(t)$ calculadas acima obtemos

$$\Theta_{11}(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\Omega t) \quad (17.90)$$

$$\Theta_{12}(t) = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin(2\Omega t) \quad (17.91)$$

$$\Theta_{22}(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\Omega t) \quad (17.92)$$

$$\Theta_{33}(t) = I_3 \quad (17.93)$$

$$\Theta_{13}(t) = \Theta_{23}(t) = 0 \quad (17.94)$$

Os termos constantes do momento de quadrupolo não contribuem para a radiação por não dependerem do tempo e portanto podem ser ignorados. Os Q_{ij} são as amplitudes do momento de quadrupolo de uma massa devido a sua rotação. Se substituirmos em (17.84) os valores de Θ_{ij} acima chegamos, após um pouco de álgebra, à expressão

$$P = \frac{32 G \Omega^6}{5 c^5} \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right)^2 (I_1 + I_2)^2 \quad (17.95)$$

Potência emitida por corpo girante

A grandeza

$$\epsilon = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad (17.96)$$

na expressão acima é chamada de *elipticidade equatorial* do corpo em questão e, menos comumente, de *oblaticidade* ou *achatamento*¹⁹. Um corpo perfeitamente esférico tem uma elipticidade $\epsilon = 0$ e portanto não emite ondas gravitacionais (a métrica gerada por um corpo perfeitamente esférico é independente do tempo pois seu tensor energia-momento não varia com t segundo o teorema de Birkhoff). Um corpo perfeitamente esférico porém emite ondas gravitacionais se ele estiver

¹⁹ Matematicamente a elipticidade, que está relacionada à excentricidade da elipse, é definida via $(a - b)/a$ onde a e b são os semieixos maior e menor, respectivamente. Ela mede o quão achatada uma elipse é. A definição usada em nosso contexto é o que os matemáticos chamam de *terceira elipticidade* ou *terceiro achatamento* e foi introduzida por W. Bessel para descrever o achatamento de corpos celestes. Esta grandeza é bastante frequente na Geodesia.

em uma órbita de raio r em torno de outro astro. Do ponto de vista da Mecânica, o que temos é uma massa m que gira em torno de um ponto e cujo momento de inércia vale $I_1 = mr^2$, $I_2 = 0$. Isso nos leva à

$$P = \frac{32 G \Omega^6 m^2 r^4}{5 c^5}. \quad (17.97)$$

No caso de Júpiter, para cuja órbita $r = 7.78 \times 10^{11} m$, $M = 1.9 \times 10^{27} kg$ e $\Omega = 1.68 \times 10^{-8} s^{-1}$ temos

$$P = 5.3 kW \quad (17.98)$$

potência suficiente para aquecer a água de um banho mas não para que esta perda de energia afete a órbita de Júpiter. Vamos ver alguns exemplos práticos a seguir.

17.10.1 Barra delgada

Vamos supor que queiramos determinar a emissão de ondas gravitacionais em um experimento usando uma longa barra de massa M e comprimento L , girando a uma frequência Ω em torno de seu centro de massa tal que

$$M = 5 \times 10^5 kg = 500T, \quad L = 20 m, \quad \Omega = 30 s^{-1} \quad (17.99)$$

Embora esta barra não seja exatamente delgada, podemos aproximá-la como se fosse uma. Neste caso o momento de inércia de uma barra delgada que gira em torno de seu centro de massa vale:

$$I_1 = \frac{ML^2}{12}, \quad I_2 \approx 0, \quad \epsilon \approx 1 \quad (17.100)$$

Se substituirmos estes valores na expressão para potência, obtemos

$$P = \frac{32 G \Omega^6}{5 c^5} \left(\frac{ML^2}{12} \right)^2 = 2.4 \times 10^{-29} W \quad (17.101)$$

Esta emissão está muito abaixo da nossa capacidade experimental de medir tal potência. Para termos uma idéia do valor da potência que registraríamos a uma distância $D \sim L$ da barra por unidade de área seria, com os valores numéricos acima

$$\Phi_{OG} \approx \frac{P}{2\pi L^2} = 0.95 \times 10^{-32} \frac{W}{m^2} \quad (17.102)$$

Isto deixa ainda mais claro a não factibilidade de realizar tal experimento.

17.10.2 Estrelas binárias

Um sistema binário é formado por estrelas de massas M_1 e M_2 que orbitam em torno do centro de massa comum. Para facilitar consideremos que a distância r entre elas permaneça constante. Neste caso elas podem ser consideradas como um rotor rígido (halteres) com

$$I_1 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} r^2, \quad I_2 \approx 0, \quad \epsilon \approx 1 \quad (17.103)$$

A frequência de rotação depende da distância entre elas e de suas massas e pode ser obtida igualando a força centrípeta à força gravitacional

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \Omega^2 r = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \rightarrow \Omega^2 = G \frac{M_1 + M_2}{r^3} \quad (17.104)$$

Substituindo este valor de Ω na expressão da potência temos

$$P = \frac{32 G^4}{5 c^5} \frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{r^5} \quad (17.105)$$

Esta perda de energia faz com que, com o passar do tempo, as estrelas se aproximem cada vez mais até colidirem. Podemos calcular o tempo necessário para que isto aconteça, que chamaremos aqui de t_{esp} (tempo do movimento espiral). Segundo a mecânica Newtoniana, a energia total do sistema é metade da energia potencial

$$E = -G \frac{M_1 M_2}{2r} \quad (17.106)$$

e, considerando que esta energia diminui com o passar do tempo temos

$$P = \frac{32 G^4}{5 c^5} \frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{r^5} = -\frac{dE}{dt} = -G \frac{M_1 M_2}{2r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (17.107)$$

Em outras palavras, conseguimos associar a diminuição da distância r com o passar do tempo com a potência de dissipação de energia gravitacional na forma de uma equação diferencial para dr/dt :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64 G^3}{5 c^5} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{r^3}. \quad (17.108)$$

Podemos resolver esta equação diferencial facilmente para um $r(0) = r_0$ até um r para um t arbitrário integrando ambos os lados

$$\int_{r_0}^r r'^3 dr' = -\frac{64 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 c^5} \int_0^t dt', \quad (17.109)$$

o que nos leva finalmente à

$$r(t) = \left[r_0^4 - \frac{256 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 c^5} t \right]^{1/4} \quad (17.110)$$

Por definição o t_{esp} é aquele para o qual $r(t_{esp}) = 0$. Da expressão acima concluímos que

$$t_{esp} = \frac{5 c^5 r_0^4}{256 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}. \quad (17.111)$$

Este resultado nos permite escrever a equação (17.110) de maneira mais sucinta:

$$r(t) = r_0 \left[-\frac{t}{t_{esp}} \right]^{1/4}. \quad (17.112)$$

Como exemplo tomemos duas estrelas com a massa do nosso Sol M_\odot que orbitassem à uma distância de $10 R_\odot$ uma da outra. Da expressão (17.111) obtemos para este caso

$$t_{esp} \sim 10^{12} \text{ anos} = 1 \text{ trilhão de anos}, \quad (17.113)$$

ou seja, muito superior à idade de nosso Universo.

Sistema binário PSR 1913+16.

O binário PSR 1913+16 ou binário de Hulse-Taylor, como ele é chamado, foi descoberto por R. A. Hulse e J. H. Taylor em 1974 e lhes rendeu o prêmio Nobel de 1993. Ele é formado por um pulsar e uma estrela de nêutrons e está entre os objetos mais estudados da astrofísica. Devido às extensas observações, conhecemos as grandezas que o caracterizam com grande precisão:

$$\begin{aligned} T &= 0.322997448930 \pm 0.000\,000\,000\,004 \text{ d} \\ M_1 &= (1.4414 \pm 0.000\,2) M_\odot \\ M_2 &= (1.3867 \pm 0.000\,2) M_\odot \end{aligned} \quad (17.114)$$

A órbita das estrelas é fortemente elíptica e por isto nosso resultado serve apenas como estimativa. Colocando estes resultados na equação (17.111) obtemos

$$t_{esp} \sim 10^9 \text{ anos} = 1 \text{ bilhão de anos}, \quad (17.115)$$

Embora este resultado seja aproximado, ele era um dos resultados utilizados antes do famoso experimento *LIGO* de 2016 como indício da existência de ondas gravitacionais. Isto porque pela Lei de Kepler $T^2 \propto r^3$ implica em $dT/dt = 3dr/r$, ou seja

$$\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2} \frac{T}{r} \frac{dr}{dt} \quad (17.116)$$

Mas, da expressão (17.112) temos que

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_0 = -\frac{1}{4} \frac{r_0}{t_{esp}} \quad (17.117)$$

o que nos permite escrever (17.116) como

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{T}{t_{esp}} \approx -10^{-12} \quad (17.118)$$

As medidas experimentais nos dão ²⁰ um valor de dT/dt igual a

$$\frac{dT}{dt} = -(2.4184 \pm 0.0009) \cdot 10^{-12} \quad (PSR 1913 + 16) \quad (17.119)$$

ou seja, nossa estimativa relativística para t_{esp} leva a um resultado para dT/dt com a ordem de grandeza correta. Depois de descartadas todas as outras hipóteses acerca da variação da órbita, o único efeito plausível que restou foi a perda de energia por radiação gravitacional.

Sistema binário ι -Boötis.

Neste caso temos os valores conhecidos para as 2 estrelas do sistema como sendo

$$T = 0.268 d, \quad M_1 = 1.35 M_{\odot}, \quad M_2 = 0.68 M_{\odot}, \quad D = 12 pc \quad (17.120)$$

onde $D = 12 pc \approx 39.12$ anos-luz é a distância deste sistema binário à Terra. Usando estes dados temos que a potência emitida pelas estrelas é

$$P \approx 3.2 \times 10^{23} W \quad (17.121)$$

e o fluxo de energia Φ_{OG} que nos atinge vale, neste caso

$$\Phi_{OG} = \frac{P}{4\pi D^2} \approx 1.8 \times 10^{-13} \frac{W}{m^2}. \quad (17.122)$$

Isto corresponde à incidência de energia por m^2 que recebemos deste sistema de estrelas.

17.10.3 Pulsares

Para o pulsar descoberto por Jocelyn Bell em 1967 conhecemos a taxa com a qual sua rotação diminui. Pulsares, como discutido no capítulo 14, são estrelas de nêutrons com massa $M \sim M_{\odot}$ e com raio aproximado entre 5 e 10 km. Vamos tentar entender aqui se esta desaceleração pode ser explicada por ondas gravitacionais.

No centro da Nebulosa do Caranguejo se encontra o pulsar *NPO 0532*, cujo período é conhecido e vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.033 s \quad (17.123)$$

O período deste pulsar aumenta a uma taxa conhecida:

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = -\frac{2\pi \dot{\Omega}}{\Omega^2} = 4.2 \times 10^{-13} \quad (17.124)$$

²⁰C. M. Will, *Was Einstein right? Testing relativity at the centenary*, arXiv gr-qc/0504086; *The confrontation between General Relativity and Experiment*, arXiv gr-qc/0102036.

A NPO 0532 tem uma massa $M \sim 1.4 M_{\odot}$ e um raio da ordem de 10 km. Este raio e a densidade de massa dependem da equação de estado que usemos para modelar este pulsar, mas modelos teóricos dão um momento de inércia I entre os valores ²¹

$$3 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2 \leq I \leq 3 \cdot 10^{38} \text{ kg m}^2 \quad (17.125)$$

Tentaremos agora explicar a desaceleração pela perda de energia na forma de ondas gravitacionais, isto é:

$$\frac{d}{dt} E_{rot} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I \Omega^2}{2} \right) = I \Omega \dot{\Omega} = -P \stackrel{\text{Eq. (17.95)}}{=} = -\frac{32 G \Omega^6}{5 c^5} \epsilon^2 I^2 \quad (17.126)$$

onde usamos a definição de elipticidade e substituímos $(I_1 + I_2)$ na eq. (17.95) por I . Substituindo os valores de Ω , $\dot{\Omega}$ e I acima nesta expressão obtemos uma elipticidade de

$$\epsilon \approx 6 \cdot 10^{-4}. \quad (17.127)$$

Isto significa que a elipticidade é praticamente o de uma esfera, o que é altamente improvável para nêutrons submetidos a um campo gravitacional tão intenso como o que existe em pulsares. Espera-se que na fase inicial de uma estrela de nêutrons, isto é no primeiro ano da sua existência, ela esteja sujeito a grandes deformações e portanto emita grandes quantidades de energia na forma de ondas gravitacionais.

Resta tentar explicar a perda de energia através da radiação de um dipolo magnético, em cujo caso substituímos a equação (17.126) por

$$\frac{d}{dt} E_{rot} = I \Omega \dot{\Omega} = -P_{em} = -\frac{2 \mu^2}{3 c^3} \Omega^4, \quad (17.128)$$

onde μ é o momento de dipolo magnético perpendicular ao eixo de rotação. Para que a desaceleração tenha o valor experimental observado, precisamos de um valor de μ igual à

$$\mu = 2.5 \times 10^{24} \text{ Gauss m}^3. \quad (17.129)$$

Este valor é plausível pois dados observacionais do espectro associados à transições eletrônicas entre níveis de Landau levam à campos magnéticos na estrela da ordem de $B \sim 10^{12} \text{ Gauss}$. Com um raio $R \approx 10^4 \text{ m}$, obtém-se um valor de μ da ordem

$$\mu \sim B R^3 \approx 10^{24} \text{ Gauss m}^3. \quad (17.130)$$

ou seja, condizente com o valor observado.

17.11 Detecção de ondas gravitacionais por interferometria

Duas partículas livres no campo de uma onda gravitacional mudam sua distância L por um fator ΔL dado por (v. eq 17.71):

$$\frac{\Delta L}{L} = a \cos(\omega t) \quad (17.131)$$

²¹ T. Fließbach, *op. cit.*, p. 211.

onde consideramos no caso $a_{12} = 0$ e $\phi = \pi/2$. A expressão acima relaciona o deslocamento relativo $\Delta L/L$ com a amplitude da onda gravitacional. Esta amplitude, por sua vez, podemos calcular diretamente usando a equação (17.79) que a relaciona com a potência/área da onda gravitacional incidente:

$$a = \sqrt{\frac{8\pi G \Phi_{OG}}{c^3 \omega^2}} = 1.4 \cdot 10^{-18} \left(\Phi_{OG} T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (metros)} \quad (17.132)$$

onde substituímos $\omega = 2\pi/T$ e os valores conhecidos de G e c foram usados. Para os valores de potência calculados logo acima (e outros não calculados aqui) temos

$$a \approx \begin{cases} 10^{-34} & \text{barra delgada} \\ 10^{-20} & \iota\text{-Boötis} \\ 10^{-17} & \text{colapso de estrelas binárias} \\ 10^{-24} & \text{Pulsar NPO 0532} \\ 10^{-22} & \text{Supernova no Aglomerado de Virgem} \\ 10^{-19} & \text{Supernova no centro da Via-Láctea} \end{cases} \quad (17.133)$$

Apesar da enorme densidade de fluxo de energia da ordem de 10^7 W/m^2 para estrelas binárias em colapso, a variação relativa do tamanho dos objetos é extremamente pequena. As últimas três linhas (pulsar e supernovas) são estimativas otimistas pois a o valor de Φ_{OG} associado a estas estrelas pode ser da ordem de um décimo ou um centésimo do valor calculado. A isto se associa o fato que a energia utilizada para o cálculo de Φ é liberada num curto período de tempo, da ordem de 0.1 segundos. Já a binária ι -Boötis representa uma fonte contínua de potência e estrelas deste tipo são as melhores candidatas para a detecção de ondas gravitacionais. Por isso as ondas gravitacionais observadas em 2016 foi a da colisão de dois buracos-negros de aproximadamente 29 e 36 M_{\odot} (v. discussão no início deste capítulo), portanto um sistema binário.

A ideia é simples: um interferômetro tem seus braços esticados e contraídos durante a passagem da onda. Como discutido no final da seção 1.4, se a onda incidente é perpendicular ao plano do interferômetro, um braço é esticado enquanto outro é encolhido, e vice-versa. Essa variação causa uma mudança no padrão de interferência do laser.

A expansão máxima de um braço é ΔL e ocorre num intervalo $\delta t = \pi/\omega$. Durante este intervalo de tempo a luz percorre N vezes a distância entre os espelhos, ou seja

$$NL = c \delta t = \pi \frac{c}{\omega} \quad (17.134)$$

O caminho de comprimento NL se encolhe por uma fator de $N\Delta L$, que

corresponde a uma diferença de fase

$$\Delta\phi_{OG} = 2\pi \frac{N\Delta L}{\lambda_\gamma} = \pi \frac{\omega_\gamma}{\omega} a \quad (17.135)$$

onde ω_γ é a frequência do laser. Existe porém uma incerteza na diferença de fase dos fótons produzidos pelo laser que deve ser considerada, pois estamos lidando com dimensões de dilatação e contração dos braços interferométricos da ordem de 10^{-20} . Em outras palavras, a diferença de fase do caminho ótico deve ser maior que aquele devido ao princípio da incerteza. Vamos calcular esta incerteza primeiro.

Durante o intervalo de tempo δt o laser produz uma energia $P_\gamma \delta t$, isto é

$$E_\gamma = \frac{\pi P_\gamma}{\omega} \quad (17.136)$$

que corresponde a um número médio de fótons de energia $\hbar\omega_\gamma$ da ordem de

$$\langle N_\gamma \rangle \approx \frac{\pi P_\gamma}{\omega} \frac{1}{\hbar\omega_\gamma} \quad (17.137)$$

Para os fótons, pelo princípio da incerteza, a fase ϕ e número N_γ são variáveis quânticas complementares e o princípio da incerteza diz que

$$\Delta\phi_{mq} \Delta N_\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (17.138)$$

Sendo o laser coerente vale o sinal de igualdade na expressão acima e $\Delta N_\gamma \approx \langle N_\gamma \rangle^{\frac{1}{2}}$. Isto significa que a incerteza na fase do feixe de laser é, sob o ponto de vista quântico,

$$\Delta\phi_{mq} = \frac{1}{2\Delta N_\gamma} \approx \frac{1}{2\sqrt{\langle N_\gamma \rangle}} \quad (17.139)$$

A detecção experimental só é possível se

$$\Delta\phi_{OG} \geq \Delta\phi_{mq} \quad (17.140)$$

Levando em contas as estimativas para estas duas fases ficamos que será possível ter resolução suficiente para detectar as ondas gravitacionais se

$$a \geq \sqrt{\frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar\omega}{P_\gamma/\omega} \frac{\omega}{\omega_\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar\omega^3}{P_\gamma \omega_\gamma}} = a_{min}$$

Limite de resolução de um interferômetro de laser

$$(17.141)$$

Usando por exemplo $P_\gamma = 10 \text{ W}$, $\hbar\omega_\gamma = 3 \text{ eV} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $\nu = \omega/2\pi = 10^3 \text{ s}^{-1}$ obtemos

$$a_{\min} \approx 2 \times 10^{-21} \quad (17.142)$$

No LIGO, o comprimento dos braços do interferômetro é de 4 km, e o h observado foi da ordem $a \approx 10^{-20}$ m. Nos EUA há dois laboratórios LIGO, distantes praticamente por algo em torno de 3000 km. Um sinal detectado em um dos laboratórios levaria algo em torno de 10 ms para ser detectado no segundo, tempo necessário para a onda gravitacional viajar de um para outro. Este atraso no sinal foi realmente observado, o que reforçou a conclusão de que se tratava de uma onda gravitacional.

Lembramos que as equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (17.143)$$

A forma destas equações nos permitem definir \mathbf{E} e \mathbf{B} em termos do potencial escalar ϕ e do potencial vetor \mathbf{A} , respectivamente. No caso de \mathbf{B} temos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (17.144)$$

A priori a introdução desta grandeza representa apenas uma transformação matemática pois o divergente do rotacional de um vetor \mathbf{a} qualquer é sempre igual a zero: $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a}) = 0$. Se um campo vetorial tem circulação, ele não pode ter fluxo. Se substituirmos esta expressão na equação acima para o rotacional de \mathbf{E} obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (17.145)$$

Porém, a quantidade entre parênteses cujo rotacional é igual a zero pode obviamente ser escrita como o gradiente de uma função escalar por um motivo matematicamente análogo, ou seja, o rotacional do gradiente de uma função f é sempre zero: $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Portanto podemos escrever

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (17.146)$$

Usamos nesta expressão o fato que os operadores ∇ e $\partial/\partial t$ comutam

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla. \quad (17.147)$$

2 [Isto vale apenas para $\partial/\partial t$ mas não para d/dt !]. Substituindo estas novas expressões para \mathbf{E} e \mathbf{B} nas equações $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ obtemos

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (17.148)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (17.149)$$

Com isto conseguimos reduzir um conjunto de quatro equações para apenas duas, mas ainda acopladas. É possível desacoplar estas equações usando a

arbitrariade na definição de \mathbf{B} em termos de \mathbf{A} . O potencial vetor é arbitrário pois sempre podemos adicionar a ele o gradiente de uma função escalar Λ arbitrária, pois pela transformação

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (17.150)$$

\mathbf{B} permanece inalterado. Para que isto porém não afete o campo elétrico, somos obrigados a redefinir o potencial escalar segundo

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (17.151)$$

Esta liberdade nos permite escolher um conjunto de potenciais (\mathbf{A}, ϕ) de tal modo a tornar o termo entre parênteses na segunda equação em (17.148) nulo:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (17.152)$$

Esta escolha nos permite desacoplar as duas equações para Φ e \mathbf{A} e escrever

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 & \rightarrow & \quad \square \phi = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0 & \rightarrow & \quad \square \mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (17.153)$$

onde o operador D'Alembertiano *quabla* é, como bem sabemos:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial^\mu \partial_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu. \quad (17.154)$$

Junto com (17.152) estas equações são completamente equivalentes às equações de Maxwell para \mathbf{E} e \mathbf{B} na ausência de cargas e correntes, as chamadas equações de Maxwell homogêneas. No caso das presença de densidade de carga ρ e corrente \mathbf{J} , este resultado pode ser facilmente generalizado. A condição representada pela equação (17.152) é chamada de *condição de Lorenz*²². As transformações (17.150) e (17.151) são aquilo que chamamos de *transformações de calibre* (*gauge transformations*). Uma outra transformação de calibre muito usada é o chamado *calibre de Coulomb* (*ou de radiação ou transversal*). Este é o calibre onde tomamos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (17.155)$$

que leva em (17.148) à equação

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (17.156)$$

No caso da presença de cargas ρ ficamos com a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.157)$$

cuja solução é

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (17.158)$$

que nada mais é que o potencial de Coulomb para um dado tempo t e uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$. Daí vem o nome do calibre. Caso estejamos trabalhando num meio isotrópico de permissividade ϵ e permeabilidade μ , as equações para os potenciais se tornam

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J} \end{aligned} \quad (17.159)$$

²² Ludvig Valentin Lorenz (1829–1891), físico e matemático dinamarquês.

Cosmologia I: uma introdução

*It has been said that the Greeks found the universe a mystery and left it a polis.
John D. North, The measure of the Universe, 1965.*

18.1 Introdução

A *Cosmologia* ou *Estudo do Cosmos*, como o próprio nome sugere, é a Física que descreve o nosso Universo como um todo. Ela difere da Física em geral em dois aspectos muito importantes:

- i. o objeto de estudo é único, ou seja, não temos como reproduzir o mesmo sistema físico e compará-lo com outros e
- ii. todas as observações que dispomos vêm de uma região limitada pelo alcance de nossos instrumentos.

Do ponto de vista prático isto significa que na construção de modelos para o Universo dependemos em maior medida, quando comparada à Física usual, de hipóteses que nos pareçam plausíveis mas muitas vezes são difíceis de serem testadas.

A história da cosmologia moderna teve início com a criação por Einstein entre 1913 – 1916 da Relatividade Geral e a consequente geometrização da teoria gravitacional. Tomando por fundamento a idéia que a estrutura geométrica espaço-temporal do universo é equivalente à estrutura dos campos gravitacionais e, além disso, que esta estrutura geométrica é determinada pela massa e energias presentes no Cosmos, chegou-se à pergunta sobre como a distribuição de massa, energia e momento no Universo está relacionada às propriedades do espaço-tempo em escalas cosmológicas. Deste modo a geometria e cronometria global do espaço-tempo passou a ser um objeto passivo de análise na Física ¹.

Dentre todas as hipóteses da Cosmologia moderna, uma das mais importantes é aquela que diz que nossa posição no Universo não é de maneira alguma especial; muito pelo contrário, nossa posição é típica do Universo. A consequência principal é que se esta hipótese se mostra

¹ H.-J. Treder, *Philosophische Probleme des physikalischen Raumens (Problemas filosóficos do espaço em física)*, Akademie-Verlag Berlin, 1974, p. 21.

correta, podemos tomá-la como válida para todo o Universo. Isto não implica que importantes particularidades como tipos de estrelas, sistemas planetários ou a estrutura fina das galáxias devam ser iguais, mas que *algumas grandezas cujos valores são obtidos através de médias realizadas regiões extremamente grandes* devem ser características do Universo com um todo. A experiência tem nos mostrado que estas regiões são de dimensões que englobam aglomerados galácticos inteiros, algo da ordem de 100 Mpc ou 10^8 anos-luz. Historicamente falando, esta idéia é uma generalização do princípio Copernicano que tirou a Terra do centro do Universo e a relegou a um papel coadjuvante, mas agora estendido ao Cosmos.

Esta abordagem não é de modo algum evidente ou natural. No início do século XX o astrônomo sueco Carl Vilhelm Charlier (1862 - 1934) da Universidade de Lund propôs um modelo hierárquico do Universo baseado em um grande número de cálculos estatísticos advindos das extensas observações por ele feitas. Segundo Charlier o Universo era formado de aglomerados de galáxias, seguidas de aglomerados de aglomerados e assim por diante. Nossas observações porém nos levam a concluir que esta hierarquia não se estende como sugerida por Charlier e termina nos aglomerados galácticos. Para escalas maiores, segundo os resultados conhecidos, a hipótese de uma descrição calcada em uma média se mostrou adequada para descrever o Universo de maneira unificada. Se não fosse este o caso, a limitação das observações que dispomos não permitiria determinar parâmetros e propriedades que nos dissesse qual modelo de Universo seria mais apropriado. Se temos porém um modelo simples, cujos resultados nos indicam estar correto, nossa esperança é que a partir deste modelo consigamos explicar alguns detalhes mais finos, como por exemplo o processo de formação de galáxias.

As observações que dispomos que não há motivos para dizer que esta ou aquela direção do Universo observável seja especial ou apresenta propriedades especiais. Esta observação (isotropia) junto ao *status* ordinário da nossa posição no Universo (homogeneidade) formam a fundamente da Cosmologia moderna, o *Princípio Cosmológico*. Este princípio tem mais de uma formulação mas ater-nos-emos aqui a duas delas.

- **Princípio cosmológico, versão 1^a** : em escalas de distância suficientemente grandes as propriedades do Universo (mantidas as mesmas condições) são as mesmas para quaisquer observadores.
- **Princípio cosmológico, versão 2^a** : há sistemas de coordenadas nos quais as propriedades do Universo – obtidas a partir de valores médios feitos em escalas apropriadas – quando vistas de qualquer um de seus pontos se mostram espacialmente homogêneas e isotrópicas.

Estas definições são obviamente vagas, pois não especificamos ainda – e o faremos nas próximas discussões – o que entendemos exatamente por “mantidas as mesmas condições” e o quais os sistemas de coordenadas aos quais nos referimos. Não obstante estas limitações, a segunda versão é um pouco mais específica na medida em que ele menciona “sistemas de coordenadas” nos quais o princípio teria validade.

Uma consequência importante do Princípio Cosmológico é as leis da Física e as constantes são as mesmas em qualquer lugar do Universo (constantes universais!). As observações parecem confirmar isto, mas no entanto não dizem se – em particular no que diz respeito às constantes universais – as leis constantes sempre foram o que são hoje. Estas questões são tratadas pela *Cosmogonia*, ou seja, o estudo do surgimento do Universo. No nosso caso em particular, consideraremos que as leis como as conhecemos se aplicam a todo o Universo, as constantes universais são independentes do tempo e a homogeneidade do Universo nos permite representar a distribuição de matéria como um gás, onde cada galáxia representa um átomo deste gás.

Um outro pilar fundamental da Cosmologia é a observação de que as galáxias se afastam de nós, ou seja, de que o Universo está em expansão. A consequência principal disto é que vivemos em um Universo dinâmico. A dinâmica é consequência da interação das partículas que o compõem e devido as escalas envolvidas, apenas interações de longo alcance fazem sentido. Isto significa que as interações nucleares fortes e eletrofracas não precisam ser levadas em conta. O mesmo se dá com a interação eletromagnética que, embora de longo alcance, é blindada pela tendência que a matéria tem de ser neutra. Assim, a única interação relevante em escala cósmica é a interação gravitacional. Nesta escala a única descrição correta é a da TRG. O mais interessante é que, do ponto de vista histórico, após a constatação que as Equações de Campo de Einstein levavam à diferentes soluções, em particular àquelas que mostravam um Universo em expansão, descobriu-se que as mesmas equações poderiam ser obtidas da teoria Newtoniana de gravitação. Esta teoria foi expandida pelo astrofísico britânico E. A. Milne (1884 - 1950) que incorporou resultados da Teoria da Relatividade Especial. Por não incluir resultados da TRG, a Teoria de Milne é conhecida como “cosmologia não relativística”. Apesar de simples, algumas das interpretações dos resultados são diferentes e não cobrem, matematicamente falando, importantes aspectos da Cosmologia moderna. No entanto, em função de sua simplicidade e clareza, ela pode ser encontrada em muitos livros de TRG sob o nome de “teoria da gravitação pós-Newtoniana”.

Discutiremos alguns fatos históricos que nos ajudam a ter uma idéia do desenvolvimento da Cosmologia como área de estudo dentro da Física. Esta área, da maneira como a conhecemos, começou

efetivamente no século XVIII, com algumas discussões e tentativas de modelos. Apontaremos também alguns resultados experimentais que nos permitem entender a estrutura de nosso Universo como hoje o conhecemos.

18.2 Algumas datas importantes

Um dos livros mais completos sobre a história da Cosmologia moderna (pós-século XVIII) é a obra do do astrofísico e historiador britânico J. D. North ². Embora já publicado há mais de 50 anos (1965), esta obra se destaca pela discussão rigorosa dos modelos e ideias que culminaram no trabalho de Einstein e seus sucessores. Sem que adentremos nos mitos da criação do Universo de diferentes culturas, que apresentam até certo ponto alguns elementos comuns, remontemos a algumas ideias da Grécia Antiga pois foram estas que tiveram um maior impacto sobre nosso *modus operandi* de como fazer ciência ³.

Nos séculos anteriores à nossa era houve um considerável avanço no entendimento do Universo, embora houvesse uma constante mudança entre os sistemas geo e heliocêntricos. Para Pitágoras (580 – 580 A.E.C.) o formato esférico da Terra era um fato, bem como sua rotação e a idéia que ela orbitava um “fogo central”. No que diz respeito às estrelas, era sabido que algumas (planetas) se moviam mais rápidas que outras, o que levou à idéia que elas estariam presas à diferentes cúpulas que se moviam com diferentes velocidades (idéia esta que perdurou até a Alta Idade Média com as diferentes esferas, da qual a Terra era o centro). Aristarco de Samos (310 – 230 A.E.C.) propôs o sistema heliocêntrico, no qual a Terra e outros planetas orbitavam o Sol – que também era muito maior que os planetas – e a idéia que as estrelas se encontravam muito distante de nós. Eratóstenes de Cirene (276 – 195 A.E.C), bibliotecário da lendária Biblioteca de Alexandria, determinou a circunferência da Terra em 240 A.E.C. e chegou a uma valor que é apenas 1.4% menor que o valor correto de 40 000 km. Anos depois, em 150 A.E.C. Hiparco de Nicéia (190 – 120 A.E.C) apresentou um catálogo extremamente preciso de estrelas que foi usado até o século XVI de nossa era. Baseado nos cálculos de Eratóstenes ele determinou a distância Terra – Lua como algo em torno de 380 000 km, muito próximo do valor hoje medido de 384 399 km para o semi-eixo maior da trajetória. Em 150 AD Ptolomeu de Alexandria publicou seu *magnus opus*, um manual de astronomia em 13 volumes, onde se baseou fortemente nos resultados de Hiparco e ficou conhecido entre nós pelo seu nome árabe de *Almagesto*. Talvez um dos detalhes interessantes desta obra e que teria consequências futuras é o fato que Ptolomeu estimou o circunferência terrestre como tendo aproximadamente 30 000 km. Aparentemente este valor foi o que levou Colombo a estimar errado a distância até a Índia navegando em direção

² J. D. North, *The Measure of the Universe. A History of Modern Cosmology*, Clarendon Press, Oxford 1965.

³ Um estudo detalhado acerca de outras cosmologias pode ser encontrado no excelente livro de D. H. Kelley e E. F. Milone, *Exploring Ancient Skies. A Survey of Ancient and Cultural Astronomy*, 2nd. edition, Springer Verlag, 2011. Embora este livro tenha como foco principal a astronomia, há algumas seções dedicadas à cosmologia, em particular às cosmologias dos povos da Índia, Ásia, África e das Américas. No entanto o que se entende em muitos destes casos por cosmologia são mitos sobre a criação do Universo do que tentativas de explicá-lo à luz de modelos matemáticos.

ao Oeste, aportando conseqüentemente no continente Americano ⁴.

Até a Alta Idade Média e Idade Média Tardia nenhum avanço significativo ocorreu. Isso se deveu em parte à autoridade acordada ao Aristotelismo, à influência da Igreja e também a inexistência de instrumentos e observações que pudessem mudar o *status quo* vigente na ciência.

Em 1440 Nicolau de Cusa (*Nikolaus von Kues* ou *Cusanus*, 1401 – 1464) sugeriu que o Universo era infinito e as estrelas eram sóis em torno dos quais orbitavam planetas. Em 1543, após a morte de Nicolau Copérnico (1473 – 1543) veio a lume o monumental *De revolutionibus orbium coelestium*, um dos maiores marcos da ciência. Existe uma controvérsia se Copérnico chegou a ver sua obra impressa, pois a data da primeira impressão da obra e sua morte são próximas. De qualquer maneira coube a seu discípulo, o matemático austríaco Georg Joachim de Porris (1514 – 1574), a supervisão e impressão da obra ⁵. Em 1519 coube à expedição do português Fernão de Magalhães (sob bandeira espanhola) completar a circunavegação do globo terrestre. O objetivo era determinar se as Molucas (pelo Tratado de Tordesilhas de 1494) estavam em território português ou espanhol. Magalhães morreu nas Filipinas e a viagem foi completada pelo navegador Juan Sebastián Elcano, que chegou um dia antes da data marcada em seu diário de bordo por ter atravessado a linha internacional de data (que ainda não era definida, obviamente). Um resultado importante da expedição de Magalhães foi que eles foram os primeiro europeus a ver as Nuvens de Magalhães no céu austral, embora em torno de 964 o astrônomo persa Al-Rahman Al Sufi já as havia descoberto. As Nuvens de Magalhães foram descritas apenas em 1504 por Americo Vespucci.

Em 1576 o astrônomo inglês Thomas Digges, que introduziu a obra de Copérnico na Inglaterra, menciona mais uma vez a idéia de um Universo infinito, tendo nosso Sol como centro. Digges também é conhecido por ter pela primeira vez discutido o que hoje conhecemos como o *Paradoxo de Olbers*, cujo nome mais correto deveria ser *Paradoxo de Digges-Chéseaux-Olbers*, sobre o qual falaremos mais adiante. O paradoxo de Olbers diz respeito ao fato de, sendo o Universo infinito e portanto com um número infinito de estrelas, é preciso explicar o porquê da noite ser escura. Um passo adiante foi dado pelo monge dominicano Giordano Bruno de Nola (1548 - 1600), cuja morte na fogueira é marcada hoje por um belo monumento no *Campo dei Fiori* em Roma, no exato local onde foi queimado em nome da ciência. Giordano Bruno não apenas tirou o Sol do centro do Universo, argumentando que ele era apenas uma estrela como qualquer outra, como também falou da pluralidade dos mundos habitados, como o título de seu *opus magnus* deixa bem claro: *De L'Infinito, Universo et Mondi*. É de sua pena – na minha opinião – um das mais belas dedicatórias já escritas em um

⁴ Há um detalhe interessante com relação ao nome desta obra. Ptolomeu o intitulou *Μαθηματικὴ Συναξίς* ou *Mathematike Syntaxis* (*Syntaxis Mathematica* em latim). Posteriormente a obra passou a ser conhecida como *Ἡ Μεγαλὴ Συναξίς* ou *Ne Megale Syntaxis* (latim *Magna Syntaxis*). O superlativo de *Μεγαλὴ* (grande) no grego antigo é *μεγιστὴ* (*megiste*, maior) que passou assim indicar a maior entre as obras de Ptolomeu. Este verdadeiro tratado não foi traduzida para o latim durante o Império Romano e no ocidente antes do século XII, quando Henricus Aristippus (~ 1105 – 1162), legado de Roma em Constantinopla, foi apresentado com uma cópia pelo imperador bizantino Manuel I Comnenus, traduzindo-o diretamente do grego. Sua tradução no entanto não ficou conhecida e coube a Gerardo de Cremona (1114 – 1187) uma tradução direta da versão árabe, cujo nome, tomado do grego (*megiste*), era entitulado *Al-Majisti*. Disto o nome *Almagest* ou *Almagesto* se tornou corrente no ocidente e como ainda hoje a obra é conhecido entre nós. Gerardo de Cremona era um importante e conhecido tradutor de obras científicas do árabe para o latim.

⁵ Este importante cientista é mais conhecido pelo nome latino Rethicus por ele adotado, pois a cidade de Feldkirch onde nasceu se encontra na província que os romanos chamavam de Rhaetia.

livro científico, que transcrevo abaixo:

Se eu, ilustríssimo Cavaleiro⁶, manejasse o arado, apascentasse um rebanho, cultivasse uma horta, remendasse um fato, ninguém faria caso de mim, raros me observariam, poucos me censurariam, e facilmente poderia agradar a todos. Mas, por eu ser delineador do campo da natureza, atento ao alimento da alma, ansioso da cultura do espírito e estudioso da atividade do intelecto, eis que me ameaça quem se sente visado, me assalta quem se vê observado, me morde quem é atingido, me devora quem se sente descoberto. E não é só um, não são poucos, são muitos, são quase todos. Se quiserdes saber porque isto acontece, digo-vos que a razão é que tudo me desagrada, que detesto o vulgo, a multidão não me contenta, e só uma coisa me fascina: aquela, em virtude da qual me sinto livre em sujeição, contente em pena, rico na indigência e vivo na morte; em virtude da qual não invejo aqueles que são servos na liberdade, que sentem pena no prazer, são pobres na riqueza e mortos em vida, pois que têm no próprio corpo a cadeia que os acorrenta, no espírito o inferno que os oprime, na alma o error que os adoenta, na mente o letargo que os mata, não havendo magnanimidade que os redima, nem longanimidade que os eleve, nem esplendor que os abrilhante, nem ciência que os avive. Daí sucede que não arredo o pé do caminho, por cansado; nem retiro as mãos da obra que se me apresenta por indolente; nem qual desesperado, viro as costas ao inimigo que se me opõe, nem como deslumbrado desvio os olhos do divino objeto [...] falando e escrevendo, não disputo por amor da vitória em si mesma (pois que todas as reputações e vitórias considero inimigas de Deus, abjetas e sem sombra de honra, se não assentarem a verdade), mas por amor à verdadeira sapiência e fervor da verdadeira especulação me afadigo, me apoquento, me atormento. É isto que irão comprovar os argumentos da demonstração, baseados em raciocínios válidos que procedem de um juízo reto, informado por imagens não falsas que, como verdadeiras embaixadoras, se desprendem das coisas da natureza e se tornam presentes àqueles que as procuram, patentes àqueles que as miram, claras para todo aquele que as aprende, certas para todo aquele que a compreende. Apresento-vos agora minha especulação acerca do infinito, do universo e dos mundos inumeráveis.⁷

Em 1609 Johannes Kepler (1571 – 1630) tornou suas leis acerca do movimento planetário conhecidas. Isto só foi possível graças às observações muito precisas de Tycho Brahe (1546 – 1601), de quem Kepler foi assistente em Praga. No mesmo ano Galileu Galilei (1564 – 1642) inventa o telescópio e descobre as montanhas na Lua, os anéis de Saturno, os satélites de Júpiter e as manchas solares. Em 1608 o fabricante de lentes Johann Lipperhey (~ 1570 – 1619) submeteu a primeira patente de um telescópio, razão pela qual é considerado seu inventor junto a Galileu.

Em 1690 Isaac Newton (1643 – 1727) deduz as equações do movimento planetário. Com isto tornou-se claro que a matéria é mesma em todo o Universo (as leis eram aplicáveis a todos os corpos celestes). Em 1700 já se tinha uma noção do tamanho do sistema solar e o raio da órbita terrestre foi calculado com algo em torno de 300 milhões de quilômetros. Newton porém já tinha uma idéia de quão distantes as estrelas se encontravam e estimou que a estrela mais próxima do Sol estaria algo em torno de 100 000 vezes mais distante de nós que o Sol (o valor correto é aproximadamente 270 000 vezes).

⁶ A obra é dedicada à Michel de Castelnau, embaixador do rei Henri III da França, que se interessou por sua obra quando da estadia de Bruno em Paris (1579 - 1583) e facilitou sua fuga para a Inglaterra.

⁷ Giordano Bruno da Nola, *Acerca do Infinito, do Universo e dos Mundos*, 3a. edição, trad. de Aura Montenegro, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984.

Edmond Halley (1655 – 1742) descobriu em 1718 que as estrelas na verdade não eram fixas, mas se moviam. Ele fez isto comparando as posições de algumas estrelas mais brilhantes com as suas posições dadas pelo Almagesto de Ptolomeu. Um dos resultados mais importantes de Halley porém foi prever a órbita do cometa que hoje leva seu nome usando as leis de Newton, o que lhe trouxe um enorme reconhecimento por cientistas da época.

Em 1744 o astrônomo suíço Jean-Phillipe Loys de Cheseaux (1718 – 1751) mencionou o famoso paradoxo de Olbers. O nome *paradoxo de Olbers* se deve ao fato que em 1826 ele foi formulado de maneira precisa e independente pelo médico e astrônomo alemão Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758 – 1840). Uma discussão histórica muito interessante sobre este problema pode ser encontrada no livro de Stanley L. Jacki ⁸.

O *Princípio de Olbers* diz que o céu noturno em um Universo infinitamente grande e com uma distribuição uniforme e estática de estrelas deveria ser tão claro quanto o céu diurno. Para entendermos este problema (ou, paradoxalmente, um *não problema* como discute Jacki em seu livro), imaginemos um observador que mede a *luminosidade* das estrelas. Por uma questão de simplicidade, imaginemos que todas tenham a mesma luminosidade L (= valor absoluto da potência radiante emitida por um corpo). Quando uma estrela se encontra a uma distância r do ponto de observação, o fluxo de energia medido é

$$\ell = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (18.1)$$

onde ℓ é também conhecida como *luminosidade aparente* ou densidade de fluxo luminoso. Em uma casca esférica de espessura dr a uma distância r do observador, encontram-se $4\pi n r^2 dr$ estrelas onde n é a densidade média de estrelas. Estas estrelas geram no ponto de observação uma luminosidade aparente igual à $\ell 4\pi n r^2 dr$. Portanto, o fluxo total para um Universo infinito com n constante vale

$$\ell_{tot} = Ln \int_{r_{min}}^{\infty} dr = \infty \quad (18.2)$$

onde o limite inferior da integral pode ter qualquer valor (0 ou um r_{min} qualquer) que a integral ainda diverge. A solução do paradoxo por de Cheseaux e Olbers era que parte desta energia era absorvida pelo meio interestelar e portanto não nos atingiria. Porém, se isto fosse correto, este meio absorveria tanta energia que seria aquecido a ponto de emitir energia igual àquela absorvida e portanto as noites seriam claras. A solução do paradoxo na verdade é a combinação de três efeitos:

1. Num Universo com Big-Bang a luz que atinge a Terra hoje não é a luz de todas as estrelas mas apenas daquelas cuja distância não é maior

⁸ S. L. Jacki, *The paradox of Olbers's Paradox: A Case History of Scientific Thought*, Herder and Herder, New York, 1969.

que a distância máxima que a luz percorreu desde o nascimento do Universo.

2. A expansão do Universo causa um desvio para o vermelho e portanto reduz a energia $E = h\nu$ dos fótons.
3. Toda estrela tem uma quantidade limitada de nucleons e eventualmente deixa de brilhar após seu combustível ter sido gasto. Por isso quando olhamos para o céu nos deparamos em todas as direções com estrelas que já “apagaram” e conseqüentemente não podem ser vistas. Este é, de todos os três efeitos, o mais eficiente. O mais interessante é que esta explicação foi dada pelo escritor americano Edgar Allan Poe (1809–1849) no seu conto *Eureka: A Prose Poem* de 1848. Nele também Poe “previu” o Big-Bang quase 80 anos antes da sugestão de Lemaître de uma *explosão original*. Vale a pena notar que Poe propôs o Big-Bang e a solução de Olbers de modo puramente intuitivo e não científico, motivo pelo qual os historiadores consideram sua solução uma obra de arte e não uma obra científica ⁹.

⁹ S. L. Jacki, *op.cit.*.

Cosmologia II: O Princípio Cosmológico

Discutiremos neste capítulo a principal idéia por trás da descrição física do Cosmos no contexto da Relatividade Geral. O modelo mais simples – o chamado modelo padrão da Cosmologia – é descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou métrica FLRW, e será discutido com maiores detalhes no capítulo seguinte.

19.1 Um pouco de história

Da mesma maneira que a Física de Altas Energias tem o seu modelo padrão para as partículas elementares, a cosmologia relativística tem o seu modelo padrão de universo: o modelo de Friedmann. Em 1922 o físico e matemático russo Alexander Friedmann apresentou uma solução *não estática* das equações de Einstein que hoje leva seu nome. O universo de Friedmann é o modelo de um universo em expansão. Não obstante suas limitações e simplificações, ele é o fundamento de toda a chamada cosmologia relativística e ponto de partida de todo modelo cosmológico do universo em expansão. O mais interessante é que Einstein inicialmente rejeitou o modelo, dizendo haver um erro nas contas de Friedmann. O artigo de Friedmann foi publicado em alemão na *Zeitschrift für Physik*, então o mais lido e apreciado de todos os *journals* da década de 20.

No curto espaço de 11 meses, entre a submissão do artigo (29 de Junho de 1929), o primeiro (18 de Setembro de 1922) e o segundo comentários de Einstein (21 de Maio de 1923), o trabalho de Friedmann passou da rejeição à aceitação pelo pai da TRG. No primeiro comentário, publicado na *Zeitschrift* Einstein afirma:

Os resultados acerca de um universo não estacionário contidos no artigo [de Friedmann] me parecem suspeitos. Na realidade se verifica que a solução apresentada não satisfaz as equações de campo.

Basicamente o que Einstein afirma é que a solução de Friedmann para as equações de campo estão erradas. A teoria literária diz que uma



Figura 19.1: Alexander Alexandrovitch Friedmann (russo: Aleksandr Aleksandrovitch Fridman, 1888 – 1925).

tragédia, diferente da comédia, deve ser dividida em 5 atos : primeiro a *introdução*, seguida de uma *ascensão* que leva ao *clímax*. Passado este vem a *queda* que abre caminho para a *tragédia* final. Embora esta idéia remonte ao poeta romano Horácio ¹ e a história do artigo de Friedmann não siga o esquema clássico de uma tragédia, se acrescentarmos a ela a sua morte aos 35 anos de idade, após beber água contaminada e morrer de febre tifóide, temos todos os ingredientes de uma.

Em outubro de 1922, cópias da *Zeitschrift* já haviam chegado ao instituto em São Petersburgo onde Friedmann trabalhava, mas a resposta de Einstein chegara à suas mãos antes, como uma carta de Friedmann endereçada diretamente ao físico alemão e datada de 6 de Dezembro atesta:

Caro Professor,

Através da carta de um amigo ² que se encontra no momento no exterior, tive a honra de ser informado que o Sr. submeteu uma nota curta, a ser publicada no 11º volume da Zeitschrift für Physik, onde se afirma que, uma vez aceitas as hipóteses feitas em meu artigo "Acerca da Curvatura do Espaço", seguiria das equações do universo deduzidas pelo Sr. que o raio de curvatura do universo é uma grandeza independente do tempo.

Friedmann mostra detalhadamente seus cálculos na carta enviada a Einstein:

Considerando que a possibilidade da existência de um universo não estacionário tenha algum interesse, permita-me apresentar aqui os cálculos que fiz ... para sua verificação e julgamento crítico.

Apresentadas as contas Friedmann conclui:

Os resultados de meu cálculo mostraram que ... tanto um universo com curvatura constante (e negativa) e um universo com uma curvatura que muda com o tempo podem existir. A possibilidade de obter um universo com curvatura constante e negativa a partir de suas equações é de enorme interesse para mim e portanto lhe peço para responder à minha carta, embora saiba bem o quão ocupado o Sr. deve ser. Caso o Sr. confirme que os cálculos apresentados nesta carta são corretos, peço a gentileza de informar aos editores da Zeitschrift für Physik sobre isto; talvez, neste caso, o Sr. publique uma correção à sua afirmativa anterior ou permita que parte desta carta seja publicada.

A resposta de Einstein veio rapidamente no mesmo *journal*

Em minha nota prévia critiquei o trabalho mencionado acima ³. Contudo, minha crítica foi baseada em um erro de cálculo da minha parte, como pude me convencer por uma carta de Friedmann a mim comunicada pelo Sr. Krutkov. Considero os resultados do Sr. Friedmann corretos e lançam nova luz [sobre o tema]. Verifica-se que as equações de campo admitem não apenas soluções estáticas para a estrutura do espaço com simetria central mas também dinâmicas (ou seja, que variam no tempo).

Friedmann, em seu livro de divulgação científica *O mundo enquanto espaço e tempo* afirmou:

¹ Quintus Horatius Flaccus (65 - 8 AC) foi um dos principais expoentes líricos da língua latina durante o seu chamado Período de Ouro.

² Trata-se de Yuri Alexandrovitch Krutkov (1890-1952), físico russo que participou do projeto de construção da bomba atômica soviética. Krutkov percebeu o erro de Einstein com relação ao trabalho de Friedmann e teve vários encontros com o físico alemão a este respeito.

³ Einstein inclui o título do trabalho de Friedmann no título de sua nota.

A maneira mais correta e profunda para se estudar a geometria do universo com ajuda da Teoria de Einstein é aplicando sua teoria a todo o universo e fazendo uso da pesquisa em Astronomia.

Para concluir, fiquemos com outra passagem deste livro:

Pode-se chegar a basicamente dois tipos de universo: (1) do tipo estacionário, no qual a curvatura do espaço não muda no tempo e (2) do tipo variável, no qual a curvatura do espaço muda com o tempo. O primeiro tipo de universo pode ser imaginado como uma esfera cujo raio não muda com o tempo; a superfície bidimensional desta esfera é exatamente o espaço bidimensional de curvatura constante. O segundo tipo, por sua vez, pode se visto com uma esfera que sempre está mudando, ora aumentando seu raio, ora diminuindo como se estivesse se comprimindo. O tipo estacionário envolve somente dois tipos de Universo, que foram considerados por Einstein e de Sitter ⁴. O tipo variável representa uma grande variedade de casos. Pode haver aqueles casos em que o raio de curvatura do universo está sempre aumentando no tempo e casos, também possíveis, onde o raio de curvatura muda periodicamente: o Universo se contrai num ponto (no nada) e então aumenta seu raio novamente de um ponto até um certo raio, voltando a se contrair a um ponto, etc.. Isto nos lembra o que a mitologia Hindú diz a respeito dos ciclos de existência, e torna possível falarmos da “criação do universo do nada” mas, até o momento, podemos considerar esta hipótese apenas como um fato curioso que carece de um suporte confiável em função da inadequação do material experimental disponível na Astronomia.

Hoje sabemos que Friedmann estava certo. A ele é creditado, com justiça, a descoberta teórica da expansão do Universo. A expansão foi confirmada experimentalmente pelo astrônomo americano Edwin Hubble em 1929 mas, dois anos antes, em 1927, o cosmólogo belga Georges Lemaître publicou um trabalho onde estudou aprofundadamente os resultados de Friedmann. Lemaître concluiu que a presença de um deslocamento para o vermelho na maioria dos dados observacionais então conhecidos era devido à “velocidade de recessão das nebulosas extra-galácticas [que] é um efeito cósmico da expansão do Universo”.

19.2 Princípio cosmológico

Para que nos orientemos primeiro, vale lembrarmos alguns números pertinentes ao nosso Universo. QUanto dizemos *UNIVERSO* estamos nos referindo àquela porção do Cosmos que é acessível para nossos instrumentos. O Universo visível tem aproximadamente $4 \cdot 10^{10}$ anos-luz de raio onde há aproximadamente 10^{11} galáxias. Muitas destas têm massas de aproximadamente 10^9 a $10^{12} M_{\odot}$. Nossa própria galáxia, a *Via Lactea*, tem uma massa aproximada de $10^{12} M_{\odot}$ e uma extensão de 10^5 anos-luz. As galáxias formam conglomerados de aproximadamente 200 galáxias, conglomerados estes com dimensões da ordem de 10^7 anos-luz. A *Via Lactea* é parte de um pequeno aglomerado, o chamado *Grupo Local*, que compraz aproximadamente 20 galáxias.

⁴ O modelo de de Sitter, do físico e astrônomo holandês Willem de Sitter (1872-1934) é uma solução para as equações de Einstein com métrica plana e sem matéria, mas com uma expansão ditada pela constante cosmológica.



Figura 19.2: Georges Henri Joseph Édouard Lemaître (1894-1966), físico belga, foi o primeiro a levantar a hipótese da recessão das galáxias ser devido à expansão do Universo. Foi também o proponente da teoria do Big Bang. Lemaître era padre católico.

Os modelos cosmológicos tem por objetivo descrever a evolução temporal e estrutura do Universo em escalas da ordem do tamanho do Universo observável. Isto significa que não nos preocupamos com a estrutura fina dentro de uma escala de, digamos, 10^8 anos-luz. Obviamente que este filtro elimina uma série de problemas interessantíssimos varrendo-os, por assim dizer, para baixo do tapete. No entanto é o preço que temos que pagar para modelar o Universo como um todo.

As observações indicam que na média o Universo é isotrópico e homogêneo onde por média entendemos uma região grande o suficiente para abarcar um grande número de galáxias. A homogeneidade em particular significa que a densidade ρ de massa no Universo é praticamente homogênea. A isotropia implica que que a velocidade média das galáxias vista de qualquer ponto do Universo é radial. Colocando isto em termos mais precisos temos ⁵:

- (i) *Homogeneidade*: o número de galáxias aparenta ser uniforme em todo o universo. Uma estimativa da densidade de massa é $\rho = 2 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$.
- (ii) *Isotropia*: o número de galáxias por unidade de ângulo sólido é aproximadamente igual.
- (iii) *Desvio para o vermelho*: há um desvio para o vermelho para as galáxias observáveis, o que significa que estão se afastando de nós.
- (iv) *O paradoxo de Olbers*: o céu é escuro a noite e não claro como o dia. Por isto o universo não pode ser infinito. Significa também o tempo de vida de estrelas e galáxias é finito.
- (v) *Radiação cósmica de fundo*: há uma radiação (microondas) de fundo de aprox. $T = 2.7 \text{ K}$. Isto é o principal indicativo da existência de um Big-Bang, o que não exclui porém a teoria mais recente do universo cíclico.

Disto tudo podemos colocar o Princípio Cosmológico da seguinte forma:

PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

No Universo todas as posições e direções são equivalentes

(19.1)

19.3 A métrica

Partindo da hipótese de uma distribuição de partículas que não exercem pressão (poeira cósmica), deduzimos no Cap. 15 a métrica (??):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (19.2)$$

⁵ Foster e Nightingale, *op. cit.*, pp. 183 – 185.

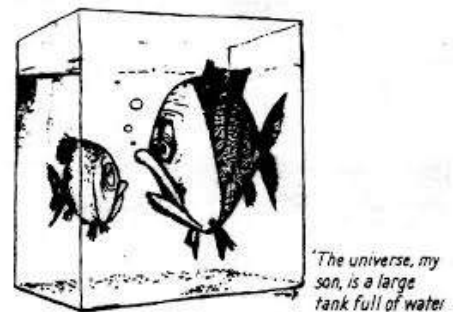


Figura 19.3: O princípio cosmológico. Fonte: H. Stephani, *General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field*, Cambridge University Press, Cambridge 1982, p. 239.

Ela foi por nós deduzida para modelar o interior de uma estrela composta de partículas que não exercem pressão mas pode ser estendida para uma distribuição análoga de partículas por todo o Universo. Quando a usamos com este propósito, ela passa a ser conhecida por *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* embora muitos autores se refiram à ela apenas como *métrica de Robertson-Walker*. No mesmo capítulo 15 das nossas notas de aula deduzimos esta métrica de maneira menos rigorosa e mais intuitiva logo abaixo da equação (?). Fisicamente os argumentos para chegarmos a esta métrica são os seguintes: devido à homogeneidade da distribuição de matéria pelo Universo e sua isotropia, a curvatura k deve ser constante no subespaço tridimensional de coordenadas espaciais. Tais espaços são denominados de *espaços de simetria máxima*. Uma vez que não podemos imaginar um espaço quadridimensional, consideremos uma dimensão a menos e a “superfície” restante. Há três possíveis superfícies de simetria máxima: a de curvatura positiva, zero ou negativa: $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$. A primeira representa uma esfera, a segunda um plano e a terceira uma pseudoesfera⁶. Todos e quaisquer pontos sobre estas superfícies são equivalentes entre si. .

Busquemos aqui discutir um pouco mais detalhadamente o sentido físico desta métrica no contexto cosmológico. Nesta métrica a trajetória de uma partícula n em queda livre é $x_n^i = \text{const.}$, $i = 1, 2, 3$. O relógio a ela associada mostra o tempo t_n . Traduzimos isto para o Universo, onde cada partícula é uma galáxia. A trajetória então é a das galáxias que em função da isotropia movem-se na direção radial pois $\theta_n = \phi_n = \text{const.}$ e sua velocidade então vem da dependência temporal de $R(t)$.

Usamos coordenadas para descrever eventos. Considerando que numa dada região do Universo tenhamos N galáxias com trajetórias $x_n^i = \text{const.}$ onde $n = 1, 2, \dots, N$, um evento em x_n^i e no tempo t_n representa a galáxia e o tempo nela medido, respectivamente. Assim mantemos a interpretação das coordenadas como sendo

$$\text{Galáxia típica: trajetória: } x_n^i = \text{const.}, \quad \text{tempo: } t \quad (19.3)$$

onde por galáxia “típica” queremos nos referir a uma galáxia que não tenha movimento próprio mas mova-se em função de $R(t)$. Este fator de escala tem dimensão de comprimento e atua de maneira igual em qualquer ponto do Universo, sendo uma função de t apenas. Isto pode ser visto se calcularmos a parte espacial do escalar de curvatura

$$R^{(3)} = R_i^i = \frac{6k}{R(t)^2} \quad (19.4)$$

Como no problema da continuidade da métrica interna e externa de uma estrela, que nos permitiu fixar o valor de $R(t = 0)$, podemos na Cosmologia considerar por exemplo a coordenada $r = 0$ como

⁶ Embora um hiperbolóide seja também uma superfície de curvatura negativa, ele não tem uma curvatura constante. A pseudoesfera é chamada tecnicamente de *tractricóide*, isto é a superfície de revolução de uma tractriz.

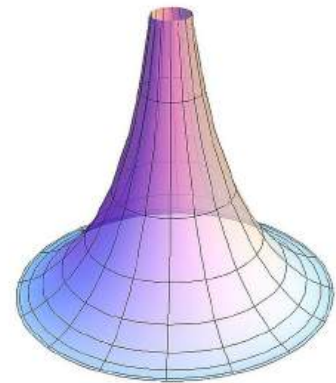


Figura 19.4: Uma tractricóide, ou pseudoesfera. Fonte: wikicommons.

representando o centro da nossa galáxia e $r = 1$ como o centro do Aglomerado de Virgem. Nesta caso R passa a ser a distância atual entre os dois, que hoje está em aproximadamente 5.38×10^7 anos-luz. Todas as distâncias físicas espaciais entre quaisquer dois pontos é proporcional à $R(t)$, sendo por este motivo chamado de *fator de escala cósmico*. O tempo t é o conhecido *tempo cósmico*: este nome vem do fato que sendo a curvatura constante, não há motivo pelo qual diferentes relógios associados a diferentes pontos (que medem o tempo-próprio) meçam tempos diferentes. Neste sentido existe um único tempo que pode ter seu instante $t = 0$ como sendo o do evento que chamamos de Big Bang ⁷.

⁷ Uma discussão mais detalhada sobre o conceito de tempo cósmico pode ser encontrada em S. E. Rugh and H. Zinkernagel, *Studies in History and Philosophy of Science*, 40:1 (2009), pp. 1-19. O artigo pode ser encontrado no depósito de Los Alamos sobre o número arXiv:0805.1947

Cosmologia III: a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Vamos aqui aplicar as Equações de Einstein para o Universo como um todo. Partindo de algumas hipóteses simples, obteremos modelos do Universo que descrevem a evolução temporal da distribuição de matéria e de seu campo gravitacional.

20.1 A métrica

Vamos partir da métrica

$$(g_{\mu\nu}) = \left(1, -\frac{R(t)^2}{1-kr^2}, -R(t)^2 r^2, -R(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (20.1)$$

Esta métrica é nosso *Ansatz* de solução para as Equações de Campo de Einstein com constante cosmológica:

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (20.2)$$

A constante cosmológica Λ é relevante para a dinâmica do Cosmos, motivo pelo qual a introduzimos agora nas equações e a discutiremos mais detalhadamente a seguir. Lembremos que quando deduzimos as Equações de Einstein (cap. 9, seção 9.5) pudemos introduzir o termo cosmológico Λ pois mesmo com sua introdução, o divergente covariante da grandeza do lado esquerdo da equação de Einstein ainda é nulo. O que acontece porém é que com sua introdução, não mais é possível obter o limite Newtoniano das Equações de Einstein, uma condição por nós usada quando queremos estudar campos gravitacionais fracos usando a TRG.

Consideremos a matéria do Universo como sendo um fluido ideal com um tensor de energia-momento da forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} P \quad (20.3)$$

Esta forma é exatamente igual àquela por nós usada para estudarmos o colapso de estrelas, ou seja, para achar a métrica interior de Schwarzschild (v. eq. 12.44). A diferença é que no caso do colapso, a pressão gravitacional é tão maior que a pressão P da matéria que podemos simplesmente tomar $P = 0$. Aqui não: consideraremos, seguindo o princípio cosmológico, um P homogêneo e diferente de zero, bem como um ρ espacialmente homogêneo:

$$\rho(r, t) = \rho(t), \quad P(r, t) = P(t) \quad (20.4)$$

A primeira simplificação que faremos é que as galáxias não tem movimento próprio e portanto sua quadrivelocidade vale

$$(u^\mu) = (u_\mu) = (c, 0, 0, 0) \quad (20.5)$$

Com isto $T_{\mu\nu}$ se torna

$$(T_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(\rho c^2, \frac{PR^2}{1-kr^2}, PR^2 r^2, PR^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (20.6)$$

cujo traço vale

$$T = T^\mu T_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho c^2 - 3P. \quad (20.7)$$

As expressões para o Tensor de Ricci nós já obtivemos quando calculamos a métrica interior de Schwarzschild, embora lá tenhamos usados as variáveis comóveis a as funções $U(r, t) = R^2/(1-kr^2)$ e $V(r, t) = R^2 r^2$. Reescrevendo as equações (15.23) mas agora em termos de $R(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ddot{R}}{R} \\ R_{11} &= -\frac{1}{1-kr^2} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) \\ R_{22} &= -r^2 (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) \\ R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22} \end{aligned} \quad (20.8)$$

A componente 00 das equações de campo resulta em

$$3\ddot{R} - \Lambda R = -\frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) R \quad (20.9)$$

ao passo que as três componentes espaciais resultam na mesma equação

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k - \Lambda R^2 = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) R^2 \quad (20.10)$$

Em resumo, obtivemos 2 equações diferenciais para 3 funções desconhecidas: $R(t)$, $\rho(t)$ e $P(t)$. Necessitamos assim de uma terceira equação para poder resolver o problema e neste caso uma equação de estado $P = P(\rho)$. Há dois casos limites que podemos usar:

$$P = 0 \quad (\text{matéria incoerente}) \quad (20.11)$$

$$P = \frac{\rho_{rad} c^2}{3} \quad (\text{dominância da radiação}) \quad (20.12)$$

A primeira equação diz respeito a matéria não correlacionada, ou seja, não interagente e com velocidades não relativísticas, para as quais $P \ll \rho c^2$ e portanto dominada pela sua massa de repouso. Esta hipótese se aplica bem ao nosso Universo, ou seja, em escalas tão grandes que os detalhes das galáxias em si e a física que possa aí ocorrer são desprezadas. A segunda equação é obtida quando consideramos um Universo dominado pela radiação e usamos a lei de Stefan-Boltzmann que relaciona a densidade de energia eletromagnética com a pressão de radiação.

Podemos a partir das duas equações diferenciais (20.9) e (20.9) obter uma equação substituindo \ddot{R} da primeira na segunda, chegando então à equação

$$\dot{R}^2 + k - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho R^2 \quad (20.13)$$

que, uma vez derivada dá

$$2R\dot{R} - \frac{2}{3}\Lambda R\dot{R} = \frac{8\pi G}{3c^2} (2R\dot{R} + R^2\dot{\rho}). \quad (20.14)$$

Multipliquemos agora a equação (20.9) por $2\dot{R}/3$ e a subtraímos de (20.14):

$$(20.14) - \frac{2}{3}\dot{R} \cdot (20.9) = -\frac{3\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = \dot{\rho} \quad (20.15)$$

Caso estejamos no limite de dominância da matéria com $P = 0$, esta equação nos dá a lei de conservação de massa

$$\rho_{mat}(t) R(t)^3 = \text{const.} \quad (P = 0, \rho = \rho_{mat}). \quad (20.16)$$

Se estiermos num regime onde há a predominância da radiação, então $\rho = \rho_{em}$ e desta equação segue que

$$\rho_{rad}(t) R(t)^4 = \text{const.} \quad (P = \frac{\rho c^2}{3}, \rho = \rho_{rad}). \quad (20.17)$$

Podemos agora considerar os 2 termos como ocorrendo na equação, isto é $\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}$. Fisicamente isto equivale a dizer que matéria e radiação não interagem ou quando um dos termos da densidade domina sobre outro, de modo que este ou aquele pode ser desprezado. Usando as abreviações:

$$\begin{aligned} K_{mat} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{mat} R^3 = \text{constante}, \\ K_{rad} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{rad} R^4 = \text{constante}. \end{aligned} \quad (20.18)$$

obtemos de (20.13) a equação da dinâmica do fator de escala $R(t)$:

$$\dot{R}^2 - \frac{K_{rad}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = -k \quad (20.19)$$

Modelo de Friedmann

Esta equação tem a forma da lei de conservação de energia mecânica na mecânica Newtoniana $E_{cin} + E_{pot} = \text{constante}$. Por isso é possível escrevê-la na forma

$$\dot{R}^2 + V(R) = -k \quad (20.20)$$

onde $V(R)$ vale

$$V(R) = -\frac{K_{rad}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2. \quad (20.21)$$

Esta equação determina o movimento em larga escala do Universo. Ela é escrita na forma de uma equação de conservação de energia cinética e energia potencial de maneira análoga àquela do problema de dois corpos da Mecânica Newtoniana. Faremos uma análise detalhada na próxima seção.

20.2 Interpretação dos resultados

Vamos considerar primeiro um caso mais simples: sem constante cosmológica Λ e sem radiação, ou seja um Universo dominado pela matéria. Podemos neste caso escrever a equação (20.19) como

$$\frac{M}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM^2}{R} = \text{const.}, \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho_{mat} R^3 \quad (20.22)$$

Vamos analisar os 3 casos correspondentes às 3 possíveis curvaturas.

- Se $k = -1$ isto significa que o lado esquerdo da equação acima, a diferença da energia cinética menos a potencial, é positivo. Portanto a energia cinética domina e portanto para um Universo de curvatura negativa a expansão continuará indefinidamente.
- Se $k = 1$, ou seja a curvatura do Universo for positiva, então $E_{cin} + E_{pot} < 0$, o que significa que temos um estado ligado: a expansão atual cessará e passará então a haver uma contração.
- Se $k = 0$, temos o caso limite em que a expansão do Universo irá assintoticamente para um valor nulo.

Voltemos agora à forma completa com o termo cosmológico. O fator $R(t)$ determina a dinâmica da distribuição de matéria no Universo e portanto do campo gravitacional (em outras palavras, da métrica) dele. Como (20.19) define de maneira unívoca a dinâmica do Universo, o *modelo de Friedmann* é também chamado de *modelo do Universo*. Diferentes modelos são definidos por diferentes escolhas das constantes k , Λ , K_{mat} e K_{rad} . Além disto uma solução concreta para $R(t)$ depende das condições iniciais $R(0)$ e $\dot{R}(0)$. As possíveis soluções podem ser entendidas em termos da idéia de um potencial efetivo, como ilustrado na figura abaixo, onde tomamos por uma questão de simplicidade

$K_{rad} = 0$. Isto não afeta a discussão pois os termos $\propto 1/R$ e $\propto 1/R^2$ têm comportamento e escala equivalentes. A diferença qualitativa depende essencialmente do sinal da constante cosmológica Λ . Desta

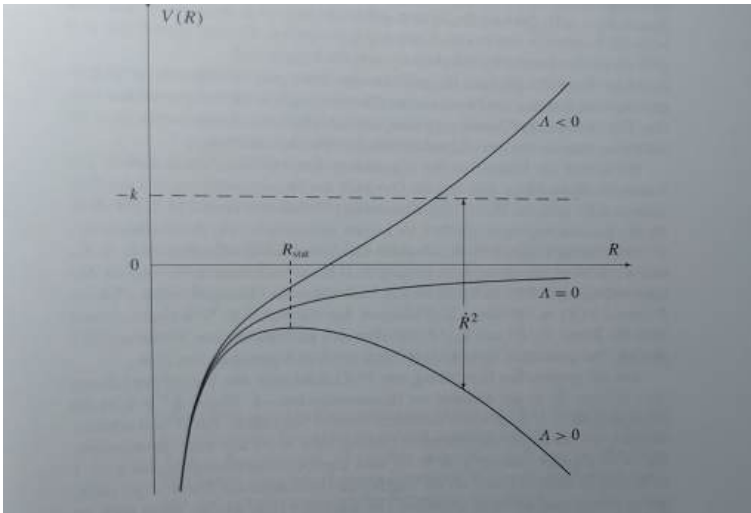


Figura 20.1: O potencial efetivo $V(R)$ para a equação de movimento cosmológica $\dot{R}^2 + V(R) = -k$. Na figura consideramos $k < 0$. A distância entre a reta $-k$ e o potencial $V(R)$ dá \dot{R}^2 . As possíveis soluções para o fator de escala cosmológico $R(t)$ dependem do sinal da constante cosmológica Λ . Para $\Lambda > 0$ há uma solução estática porém instável $R(t) = R_{stat} = constante$. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 317.

representação gráfica podemos entender como $R(t)$ se comporta.

- Para $\Lambda < 0$ e qualquer valor de k há um limite superior R_{max} . Isto pode ser visto na figura acima onde a curva $V(R)$ intercepta a reta $-k$. Em outras palavras, quando isto ocorre na equação (20.20)

$$\dot{R}^2 + V(R) = -k \quad \longrightarrow \quad \dot{R} = 0. \quad (20.23)$$

Em outras palavras, para $R \rightarrow R_{max}$, $\dot{R} \rightarrow 0$. O Universo se expande e se contrai novamente. A figura abaixo ilustra este comportamento.

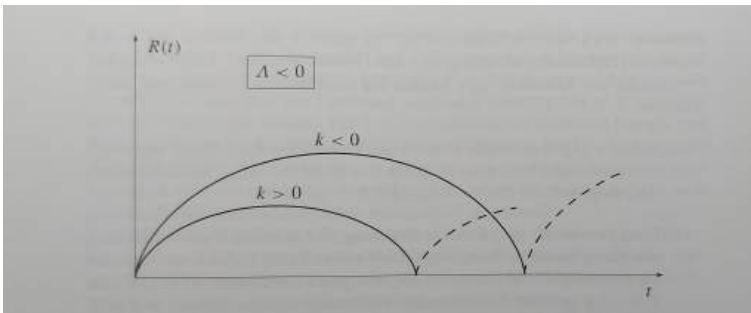


Figura 20.2: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $\Lambda < 0$. A expansão é sempre seguida de uma contração. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 320.

- As soluções para $\Lambda = 0$ dependem do fato de k ser igual a -1 , 0 ou 1 como na figura abaixo. Se $k = 1$ (Universo de curvatura positiva) temos uma “órbita” ligada, ou seja uma expansão seguida de uma contração. Para $k = 0$ (Universo plano) a velocidade de expansão vai lentamente a zero pois $\dot{R}^2 \propto 1/R$ e para $k = -1$ (Universo de curvatura negativa) a velocidade tende a uma constante. O Universo

com $\Lambda = 0$ e $k = 0$ é conhecido na literatura como *Universo de Einstein – de Sitter*.

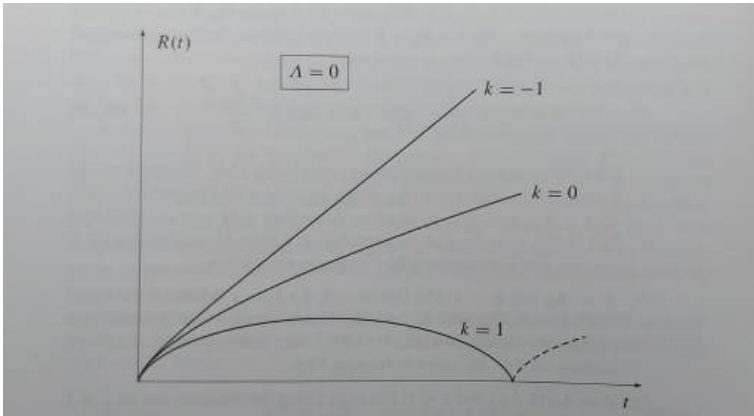


Figura 20.3: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $\Lambda = 0$. Neste caso os diferentes valores de $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$ correspondem ao problema de dois corpos que representam uma trajetória hiperbólica, parabólica ou elíptica. O modelo com $\Lambda = 0$ e $k = 0$ é chamado de *Universo de Einstein-de Sitter*. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 320.

■ Para $\Lambda > 0$ a física apresenta diferentes comportamentos.

- (a) Há um $\Lambda = \Lambda_{crit}$ para $k = 1$ que podemos ver na figura (20.1), quando a horizontal em $k = 1$ tangencia o máximo de $V(R)$. Sendo $K_{rad} \approx 0$ a situação do Universo atual, $dV/dR = 0$ e $V = -k = -1$ e portanto

$$\Lambda = \Lambda_{crit} = \frac{4}{9K_{mat}^2} \quad \text{e} \quad R = R_{stat} = \frac{3K_{mat}}{2} \quad (20.24)$$

Este é o modelo *estático* da solução de Einstein (figura abaixo). Einstein se viu forçado a introduzir uma constante cosmológica para obter um resultado $R(t) = R_{stat} = constante$. Porém da figura (20.1) vemos claramente que esta solução é instável e qualquer perturbação leva a uma contração ou expansão do Universo.

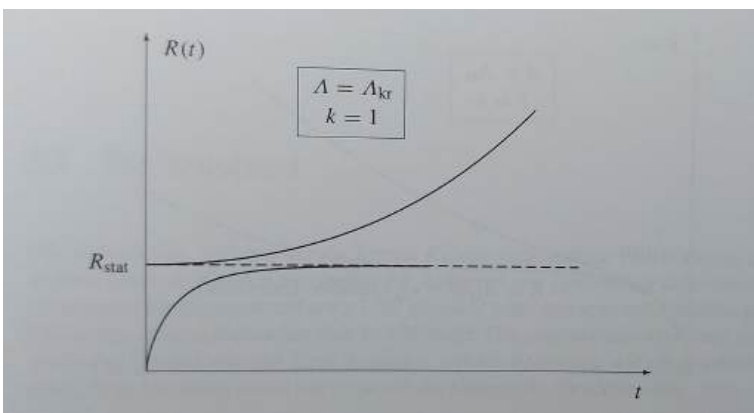


Figura 20.4: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $\Lambda = \Lambda_{crit}$ e $k = 1$. O modelo de Universo estático de Einstein (linha pontilhada) é instável: pequenos desvios levam ou a uma expansão ou a uma contração. O movimento de expansão é um crescimento exponencial da forma $R \propto \exp[\sqrt{3\Lambda} ct]$ e se aplica também para $\Lambda > 0$. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 321.

- (b) Para $\Lambda < \Lambda_{crit}$ e $k = 1$ (curvatura positiva). A horizontal $k = 1$ intercepta a curva $V(R)$ em dois pontos, R_1 e R_2 . Obtemos assim

ou uma órbita ligada entre 0 e R_1 ou uma trajetória não ligada para $R > R_2$.

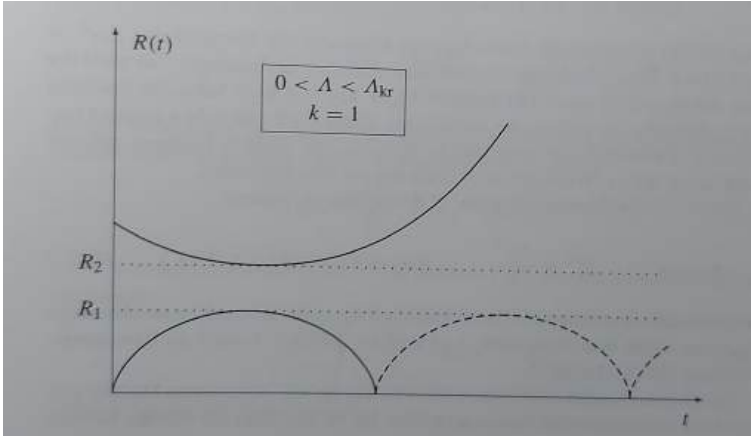


Figura 20.5: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $0 < \Lambda < \Lambda_{crit}$ e $k = 1$. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 321.

- (c) Se Λ for muito próximo de Λ_{crit} , ou seja $\Lambda = (1 + \epsilon)\Lambda_{crit}$ e $k = 1$, então a horizontal se encontra acima mas muito próxima do máximo de $V(R)$. Portanto a velocidade \dot{R} é extremamente baixa e a expansão passa a ser mais lenta. Este modelo é o chamado *Universo de Lemaître*.

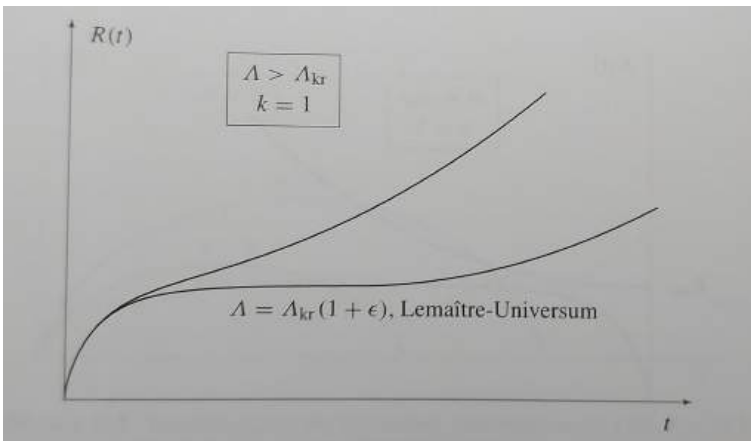


Figura 20.6: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $\Lambda > \Lambda_{crit}$ e $k = 1$. Para um Λ próximo de Λ_{crit} há uma solução quase estacionária de longa escala temporal chamada de *Universo de Lemaître*. A curva superior reproduz a solução $\Lambda > 0$ e $k = 0$ ou $k = -1$. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 322.

- (d) No mesmo gráfico acima mas agora com $\Lambda > \Lambda_{crit}$ e $k = 1$. Neste caso a horizontal $-k$ corta a curva $V(R)$ em um ponto. Nas proximidades do máximo de $V(R)$ a velocidade é reduzida e portanto a expansão.

- (e) Para $\Lambda > 0$ e $k = 0$ ou $k = -1$ ocorre algo semelhante ao caso acima, com uma pequena desaceleração próxima ao valor máximo de $R(t)$. Este comportamento está ilustrado na figura abaixo. Acredita-se que este seja o modelo que melhor representa nosso Universo atual.

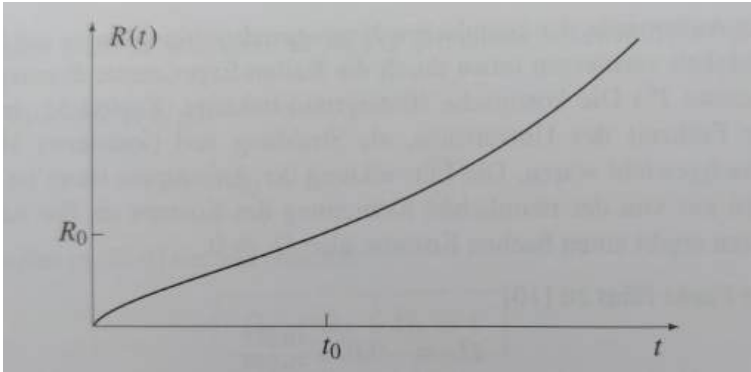


Figura 20.7: A dependência temporal do fator de escala $R(t)$ para $\Lambda > 0$ e $k = 0$ ou $k = -1$. Este modelo representaria nosso Universo. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 326.

A constante cosmológica é positiva e o termo Λ no potencial equivale a um termo *antigravitacional*. Tanto o termo $-K_{mat}/R$ quando $-\Lambda R^2/3$ tem o mesmo sinal, porém a força $-dV/dR$ tem sinais opostos. A densidade de massa usual atua no sentido de contrair a massa, ao passo que o termo da constante cosmológica atua no sentido de expansão.

Para $\Lambda > 0$ e R suficientemente grande a solução diverge

$$R \rightarrow \infty : \quad \dot{R}^2 \approx \frac{\Lambda R}{3}, \quad R(t) \approx R(0) \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) \quad (20.25)$$

que implica assim em uma expansão acelerada. Uma aceleração deste tipo só é possível se o termo em Λ for tão grande a ponto de o termo a ele proporcional dominar na equação do movimento (20.19).

Cosmografia I: desvio para o vermelho, escala de distâncias cosmológicas

21.1 O Princípio Cosmológico e a Métrica de FLRW

O princípio cosmológico diz:

- há sistemas de coordenadas nos quais as propriedades do Universo – obtidas a partir de valores médios feitos em escalas apropriadas – quando vistas de qualquer um de seus pontos se mostram espacialmente homogêneas e isotrópicas.

Este princípio diz que em coordenadas espaciais apropriadas e para um dado valor de t , o Universo é isotrópico e homogêneo. Mas de qual tempo estamos falando e qual o valor de t devemos escolher? Esta afirmação é relativamente vaga pois da TER sabemos que a simultaneidade não é um conceito absoluto e cada região do espaço-tempo e a maneira como ela é percebida depende do estado do movimento e portanto do relógio de quem o mede. Neste sentido a isotropia e homogeneidade do espaço-tempo não é válida para todos os referenciais: por exemplo, se um(a) observador(a) se encontra em um referencial no qual a Radiação Cósmica de Fundo (CBM, *Cosmic Background Radiation*) é isotrópica, uma pessoa em um outro referencial que se move em relação ao primeiro verá um desvio para o vermelho da radiação proveniente da direção da qual ela se afasta e um desvio para o azul da radiação proveniente da direção a qual ela se dirige. Uma outra questão é: o que queremos dizer com *homogêneo*? Se com isto queremos dizer que regiões suficientemente grandes são equivalentes, para compará-las precisamos explicitar em que ponto do tempo esta comparação deve ser feita pois o Universo é dinâmico. De acordo com A.G. Walker (da métrica de FLRW) devemos entender o princípio cosmológico da seguinte forma: em todo o Universo existem trajetórias nas quais os observadores que nelas se encontram observarão os mesmos valores médios (dinâmica da densidade de galáxias, a taxa de expansão do Uni-

verso, a temperatura T_γ da CMB, etc.) desde o surgimento do Universo. Um(a) observador(a) deste tipo se chama *observador(a) fundamental* e pode utilizar uma destas grandezas que varia monotonicamente no tempo como sendo o próprio tempo um uma função monotônica dele, como por exemplo $t = f(T_\gamma)$. Um tempo assim definido é chamado de **tempo cósmico padrão**. A homogeneidade e isotropia valem para um instante de tempo cósmico padrão fixo e o espaço definido a partir deste tempo tem a simetria máxima possível. Assim podemos definir um tempo cósmico t e coordenadas r , θ e ϕ de tal maneira que a métrica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (21.1)$$

seja aplicável.

Queremos obviamente fazer medidas e tentar explicá-las baseados nos modelos que temos. Discutiremos aqui portanto alguns resultados práticos que podemos obter a partir das soluções por nós conhecidas. Um dos principais resultados que nos indicam que nosso modelo é adequado o da expansão cósmica, resultado este que obtemos a partir do desvio para o vermelho das galáxias distantes. A idéia da expansão cósmica e do desvio para o vermelho que ela causa pode ser ilustrada imaginando uma esfera de raio $R(t)$ tal que $\dot{R} > 0$. À medida que a esfera se expande, dois pontos sobre sua superfície com coordenadas definidas afastam-se um do outro com velocidades proporcionais à R . Se estes pontos emitem sinais um em direção ao outro, observarão um desvio destes sinais para o vermelho e o interpretarão como sendo um efeito Doppler. A analogia serve também para a métrica de FLRW com $\dot{R} > 0$.

Embora não seja um efeito Doppler no sentido físico que atribuímos ao termo, esta interpretação leva a resultados corretos desde que as distâncias entre os objetos não sejam muito grandes. A inconsistência desta explicação no entanto vem do fato que o efeito Doppler da Relatividade Restrita pressupõe a existência de sistemas inerciais para a fonte e o receptor e que portanto tenham posições bem definidas e uma velocidade relativa entre si constante. Esta condição não é satisfeita na Relatividade Geral pois na métrica FLRW só existem sistemas inerciais localmente e uma condição como da Relatividade Restrita só se aplicaria para distâncias não muito grandes entre os pontos em questão. Desta maneira, a maneira correta de tratar do problema é através do cálculo do elemento de linha da métrica de FLRW, que faremos a seguir.

21.2 Medidas de tempo e de espaço

Antes porém de procedermos com nossos cálculos vamos fazer algo que é usual em todos os livros de Relatividade Geral: expressar distâncias

em termos de novas variáveis! ¹ Em se tratando de cálculo de distâncias na métrica FLRW, e pelo surgimento do termo

¹ Yet another transformation!

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (21.2)$$

que tem comportamentos diferentes para diferentes valores de $k = -1, 0, 1$, introduzimos uma nova coordenada radial χ da forma:

$$r(\chi, t) = f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{para } k = 1, \\ \chi & \text{para } k = 0, \\ \sinh \chi & \text{para } k = -1. \end{cases} \quad (21.3)$$

A vantagem desta nova coordenada radial χ é que podemos identificá-la por exemplo com a coordenada radial r da mecânica de Newton para o caso a métrica plana ($k = 0$), por exemplo e para todo valor de k temos que

$$dr = \sqrt{1 - kr^2} d\chi \rightarrow \frac{dr^2}{1 - kr^2} = d\chi^2 \quad (21.4)$$

Podemos achar estranho o fato de $-1 \leq r \leq 1$ para o caso $k = 1$. Lembremos primeiro que na métrica, para $dt = 0$, temos que ter $ds^2 \leq 0$. Olhando para a forma fundamental da métrica com $k = 1$, para que esta condição seja satisfeita precisamos ter no denominador do termo proporcional a dr^2 a condição $r^2 \leq 1$ e portanto a transformação $r = \sin \chi$ não representa qualquer restrição na métrica. Além disto, uma vez que na métrica aparece o termo r^2 apenas, o fato de r poder ser negativo também não representa qualquer problema e portanto a variável χ pode se tomada como variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

Imaginemos duas galáxias cuja movimento é dado por $x^i = \text{const.}$, ou seja elas não tem movimento próprio. Todo o movimento entre elas é dado pela dependência temporal do fator de expansão $R(t)$. De uma destas galáxias é emitido um sinal no tempo t_{em} , sinal este observado na outra no tempo t_o .

Para facilitar nossos cálculos e em função da homogeneidade e isotropia do espaço, consideremos um sinal luminoso que mantém uma trajetória com θ e ϕ constantes ($d\theta = d\phi = 0$). O elemento de linha neste caso pode ser escrito como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + \underbrace{r^2(\chi, k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{=0} \right] \quad (21.5)$$

Disto temos que para $dt = 0$ a distância radial a partir da origem do sistema de coordenadas vale

$$d_\chi(t) = \int_0^\chi dl_\chi = R(t) \chi. \quad (21.6)$$

De um modo geral, a distância dl entre quaisquer dois pontos no espaço vale

$$dl = R(t) \left[d\chi^2 + r^2(\chi, k) \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = R(t) d\sigma \quad (21.7)$$

onde t é mantido constante. A distância $d(t) = \int dl$ vale assim

$$d(t) = R(t) \int_{P_1}^{P_2} [d\chi^2 + \dots]^{\frac{1}{2}} \quad (21.8)$$

$$\frac{d}{dt}[\dots] \rightarrow \dot{d}(t) = \dot{R}(t) \int_{P_1}^{P_2} [d\chi^2 + \dots]^{\frac{1}{2}} \quad (21.9)$$

$$\implies \dot{d}(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} d(t) \quad (21.10)$$

Este resultado é bastante importante: ele mostra que se $R(t)$ aumenta com o tempo, aumentam as distâncias e vice-versa. Esta fórmula pode ser escrita como

$$\dot{d}(t) = H(t) d(t) \quad H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (21.11)$$

Lei de Hubble-Lemaître da Expansão do Universo

Esta equação vale para quaisquer distâncias e quaisquer valores de curvatura k . H é a famosa **constante de Hubble** que alguns autores, corretamente, preferem chamar de **número/parâmetro de Hubble** pois é uma grandeza dependente do tempo. Por este motivo usa-se normalmente o subscrito H_0 para indicar que o valor usado é o atual. Evidências observacionais mostram que ele está diminuindo (falaremos sobre a desaceleração em breve) e do valor atual de $67.8 \text{ km}/(\text{s Mpc})$ para $57 \text{ km}/(\text{s Mpc})$. Note que embora a constante de Hubble tenha dimensão de $(\text{segundo})^{-1}$, é comum na literatura expressá-la em unidade de $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e seu valor pode ser interpretado como representando a velocidade com que uma galáxia à $1 \text{ Mpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ km}$ se afasta de nós (note que $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = \text{s}^{-1}$). O inverso da constante de Hubble $1/H_0$ é o chamado **tempo de Hubble** e seu valor é de $\approx 4.55 \times 10^{17} \text{ s} = 14.4$ bilhões de anos. Esta diferença é ligeiramente maior que a idade do Universo 13.8 bilhões de anos pois a expansão não foi linear.

21.3 Velocidades superluminais

Uma das implicações da equação acima é que galáxias que se encontram a uma distância

$$d > \frac{c}{H(t)} \quad (21.12)$$

se afastam com uma velocidade maior que a velocidade da luz num universo aberto ($k = 0$ ou $k = -1$), pois

$$v_{cosmic} = \frac{d}{dt}(R\chi) = \frac{dR}{dt} \chi \stackrel{t=t_0}{=} H_0 R_0 \chi \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} \infty \quad (21.13)$$

Para efeito de visualização deste resultado e o fato que ele não viola quaisquer leis físicas, em particular o limite de velocidade c , consideremos um plano onde as distâncias entre *quaisquer* dois pontos com coordenadas conhecidas cresce linearmente com $R(t)$. A métrica nesta superfície é simplesmente $ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)(dx^2 + dy^2)$, isto é a métrica FLRW para $k = 0$. Para $\dot{R} \neq 0$ a velocidade entre dois pontos de coordenadas fixas é ilimitada. Mas como entender velocidades superluminais desta natureza? Isto não contradiria um dos fundamentos da TRE, que a velocidade da luz é o limite físico para quaisquer fenômenos? Para entender este ponto reconsideremos o que a métrica realmente significa – tanto do ponto de vista formal quanto físico – e porque isto não contradiz a TRE.

1. A expansão *por nós observada* refere-se àquela de objetos aos quais estamos causalmente conectados, isto é a uma região espaço-temporal que nos circunda nossa posição no Universo. Em virtude do Princípio Cosmológico (isotropia e homogeneidade), estendemos esta expansão a *todo* o espaço. O PC porém é a mais simples hipótese que temos para definir a métrica e com ela definimos também a métrica de regiões com as quais não estamos causalmente conectados. Para estas regiões a velocidade cósmica de fuga v_{cosmic} é um valor teórico que sai da métrica FLRW.
2. A TRE é válida em sistemas inerciais e na métrica FLRW há apenas SI locais. A métrica FLRW só pode ser aproximada por $ds^2 \approx \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ localmente e só nestes SI locais as leis da TRE se aplicam (só existe um SI global na métrica FLRW se $k = 0$ e $\dot{R} = 0$). Por exemplo, podemos aplicar um SI local para toda a região ocupada por nossa galáxia e apenas aí temos c como limite para o movimento de partículas materiais. Não existe porém um SI no qual podemos descrever o movimento de galáxias distantes, em particular para aquelas próximas ou além do limite observável do Universo.
3. Podemos assim definir um SI para a Via Lactea e um SI local para uma galáxia muito distante. Uma vez que estes SI são *locais* e não *globais*, as galáxias podem se mover com velocidades relativas $> c$.

Uma discussão detalhada acerca deste ponto pode ser encontrada no artigo de Davis e Lineweaver ². Resumindo: a métrica de FLRW é uma hipótese com a qual a partir de uma série de observações de uma região finita do espaço, estendemos os resultados para uma região infinita.

²T. M. Davis and C. H. Lineweaver, *Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the Universe*, Publications of the Astronomical Society of Australia, 21(1) (2004), 97-109. doi:10.1071/AS03040; astro-ph/0310808.

A extensão ao espaço inteiro é a maneira mais simples que nos leva a uma métrica bem definida. Esta extensão no entanto não é verificável uma vez que nossas observações estão limitadas à região visível do Universo.

21.4 Expansão do Universo e desvio para o vermelho

As galáxias se encontram em boa aproximação em um estado de repouso quando considerada a *métrica de FLRW*. O afastamento entre elas ocorre pelo aumento do “raio do Universo” $R(t)$. Na teoria cosmológica pós-Newtoniana, isto é numa combinação da gravitação clássica com a TRE há duas explicações para isto: ou as galáxias se movem umas em relação às outras e o espaço permanece inalterado ou elas se encontram em repouso num espaço que se expande ou contrai dependendo do comportamento de $R(t)$. Independente da interpretação que demos, o fato é que existe um desvio para o vermelho do espectro das galáxias distantes por elas se afastarem de nós. Se interpretássemos a expansão classicamente, na forma de um substrato espacial fixo e galáxias que se afastam com movimento próprio, temos um efeito Doppler típico. No caso da expansão do espaço via $R(t)$ porém somos levados a imaginar que também o comprimento de onda da luz emitida em algum ponto distante no tempo e no espaço será esticado ou comprimido por um fator $R(t)/R(t_0)$, ou seja

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_{em}} = \frac{R(t_o)}{R(t_{em})} \quad (21.14)$$

onde por λ_o nos referimos ao comprimento de onda observado no instante atual t_o e por λ_{em} representamos o comprimento da onda no momento t_{em} da emissão. Usando a relação $\lambda = c/v$ segue desta relação que

$$R(t_{em})v_{em} = R(t_o)v_o = \text{constante} = R(t)v. \quad (21.15)$$

Na verdade para deduzir este resultado de maneira mais rigorosa podemos considerar o tempo de propagação de dois máximos da onda eletromagnética que se encontram um na frente do outro, isto é um emitido em t_{em} e outro emitido em $t_{em} + \Delta t_{em}$, onde estes tempos representam os tempos nos quais o primeiro e o segundo máximo foram emitidos em χ_{em} . Para um observador na origem do sistema de coordenadas $\chi_o = 0$, os tempos t_o e $t_o + \Delta t_o$ são tais que

$$\chi_{em} = c \int_{t_{em}}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = c \int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} \quad (21.16)$$

pois a onda percorre a mesma distância quer usemos o intervalo $[t_{em}, t_o]$, quer usemos $[t_{em} + \Delta t_{em}, t_o + \Delta t_o]$. Isto implica

$$\begin{aligned} c \int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} - c \int_{t_{em}}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} &= 0 \\ \int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_{em}}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} &= 0 \\ \frac{\Delta t_o}{R(t_o)} - \frac{\Delta t_{em}}{R(t_{em})} &= 0 \end{aligned} \quad (21.17)$$

A passagem da penúltima para a última linha é fácil de entender se notarmos que

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} [\dots] = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} [\dots] - \int_{t_1}^{\Delta t_1} [\dots]}_{= \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2} [\dots]} + \int_{t_2}^{\Delta t_2} [\dots] \quad (21.18)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} [\dots] - \int_{t_1}^{t_2} [\dots] &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [\dots] - \int_{t_1}^{\Delta t_1} [\dots] + \int_{t_2}^{\Delta t_2} [\dots] - \int_{t_1}^{t_2} [\dots] \\ &= - \int_{t_1}^{\Delta t_1} [\dots] + \int_{t_2}^{\Delta t_2} [\dots] \\ &= -\Delta t_1 [\dots] + \Delta t_2 [\dots] \end{aligned} \quad (21.19)$$

A última passagem se justifica pois entre um pico de emissão e outra com um $\Delta t \approx 10^{-14}$ s para a luz visível, a função $R(t)$ é praticamente constante e portanto podemos aproximar

$$\int_t^{\Delta t} \frac{dt'}{R(t')} \approx \frac{\Delta t}{R(t)} \quad (21.20)$$

Isto implica finalmente que podemos escrever

$$R(t_{em}) v_{em} = R(t_o) v_o = R(t) v(t) \quad (21.21)$$

Este resultado mostra que **fótons que se propagam pelo Universo sofrem um desvio para o vermelho continuamente. Isto vale em particular para a Radiação Cósmica de Fundo.** Como para fótons a relação entre momento e frequência vale $p = hv/c$ esta expressão também pode ser escrita como

$$R(t) p(t) = \text{constante}. \quad (21.22)$$

Embora tenhamos mostrado este resultado para o fótons, ele vale igualmente para qualquer partícula de massa de repouso diferente de zero e para a qual $p(t) = \gamma m v$.

No espectro de galáxias encontramos linhas espectrais associadas à transições atômicas conhecidas. Isto significa pelo resultado acima que todo o espectro sofre um desvio para o vermelho que. O parâmetro z que mede este desvio é definido por

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_{em}} - 1 = \frac{v_{em}}{v_o} - 1 \quad (21.23)$$

e portanto

$$z_{cosmo} = \frac{R(t_o)}{R(t_{em})} - 1 \quad (21.24)$$

Redshift cosmológico

Num universo em expansão $R(t_o) > R(t_{em})$ e portanto $z > 0$ e haverá um desvio para o vermelho. Há outras fontes para este desvio, como

1. desvios provocados pelo campo gravitacional local no local de observação e
2. efeito Doppler devido ao movimento próprio da fonte.

O valor $z(t_o, t_{em})$ representa assim o desvio para o vermelho medido no tempo t_o (normalmente a data atual) e que foi emitida em t_{em} , ou seja que ficou percorreu uma distância entre o local da emissão e o da observação no intervalo de tempo $t_o - t_{em}$. Trata-se normalmente de luz que foi emitida há muito tempo e a partir de um local que se encontra tão mais distante do observador quanto mais “antiga” a luz é. Alguns valores do desvio medidos são apresentados na tabela abaixo.

Objeto	z
Galáxias com velocidade de fuga $v_f = c$ hoje	1.42
Galáxias com velocidade de fuga $v_f = c$ na emissão	1.63
Cosmic Background Radiation	≈ 1000
Maior redshift medido (Galáxia GN-z11)	11.1

Tabela 21.1: Valores de z medidos para alguns objetos. No caso da Galáxia GNz-11 (na constelação da Ursa Maior) a emissão se deu 400 milhões de anos após o Big-Bang. Esta galáxia se encontra a uma distância de 32 bilhões de anos-luz ou 9.8 bilhões de parsecs de nós. A distância percorrida por sua luz é de 13.4 bilhões de anos-luz.

Quanto a fonte emissora não se encontra muito longe, podemos expandir a expressão para $R(t)$ em série de Taylor:

$$R(t) = R(t_o) \left[1 - H_o(t - t_o) - \frac{1}{2} q_o H_o^2 (t - t_o)^2 + \dots \right] \quad (21.25)$$

onde utilizamos a constante de Hubble

$$H_o = \frac{\dot{R}(t_o)}{R(t_o)} \quad (21.26)$$

e o chamado *parâmetro de desaceleração*

$$q_o = -\frac{\ddot{R}(t_o) R(t_o)}{\dot{R}(t_o)^2} \quad (21.27)$$

Neste caso a expressão para o desvio para o vermelho se torna

$$z_{cosmo} \approx H_0(t_0 - t_{em}) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_{em})^2 + \dots \quad (21.28)$$

O significado físico do parâmetro de expansão é o seguinte: se $q_0 > 0$ então $\ddot{R}(t_0) < 0$, e no caso de uma expansão $\dot{R}(t_0) > 0$, a velocidade de expansão diminui com o tempo. Usando agora a relação entre a “distância” χ do ponto de observação à fonte temos (v. 21.6)

$$D = D(t_0) = R(t_0)\chi \approx c(t_0 - t_{em}) + \frac{H_0 c}{2}(t_0 - t_{em})^2 \quad (21.29)$$

Se eliminarmos $(t_0 - t_{em})$ da expressão para z (eq. 21.28) temos finalmente

$$z_{cosmo} \approx \frac{H_0}{c} D + \frac{1 + q_0}{2c^2} H_0^2 D^2$$

Relação distância-redshift

(21.30)

Esta relação define o famoso **Diagrama de Hubble**, representado na figura (21.1) a seguir. Este tipo de diagrama é usado na realidade não para calcular as distâncias D a outras galáxias mas a partir das medidas de D feitas por outros métodos, usa-se os resultados para achar os valores de H_0 e a desaceleração q_0 . Discutiremos isto com mais detalhes a seguir.

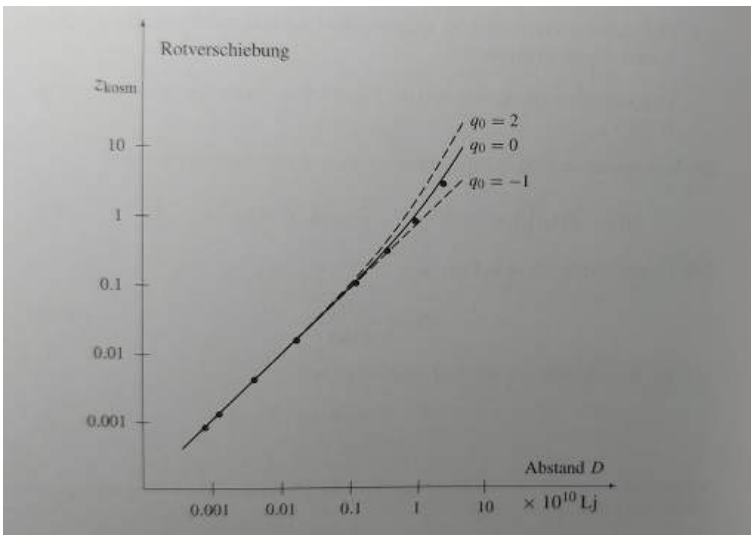


Figura 21.1: O famoso *Diagrama de Hubble* que mostra a relação entre o parâmetro de *redshift* cosmológico com a distância D da fonte. Observe a escala log-log. Para distâncias não muito grandes vale $z_{cosmo} \approx H_0 D/c$. Os desvios deste comportamento linear dependem da intensidade do fator de desaceleração, desvios estes representados pelas linhas tracejadas. Este método na verdade é usado para se determinar H_0 e q_0 a partir de medidas de distâncias de galáxias feitas usando-se um outro procedimento. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 304.

Cosmografia II: a escada cósmica de distâncias

Descobriremos aqui a escada cósmica (ou extragalática) de distâncias, ou seja uma série de métodos sucessivamente aplicados e com os quais podemos medir a distância de objetos do cosmos até nós. Com a medida simultânea das distâncias e desvio para o vermelho podemos determinar o valor da constante de Hubble H_0 e o parâmetro de desaceleração q_0 .

22.1 A escada cósmica ou extragalática de distâncias

Antes de iniciarmos a discussão é interessante observar que tanto o inglês como o alemão preconizam o uso do termo *escada cósmica* de distâncias: *cosmic distance ladder* e *kosmische Entfernungsleiter*. Em português encontramos também *escala* no lugar de escada, embora o termo escada seja mais adequado uma vez que a medida de distâncias – um problema reconhecidamente difícil – baseia-se em uma série de degraus (métodos) para distâncias cada vez maiores. Como cada nova degrau se baseia nos degraus anteriores, a alusão a uma escada é evidente. Os métodos são basicamente os seguintes:

1. *Paralaxe e métodos cinéticos*: o primeiro degrau da escada, para distâncias D relativamente pequenas, se faz com o uso de paralaxe, um método bastante conhecido baseado em trigonometria: durante a órbita de raio r_T em torno do Sol, os dois pontos diametralmente opostos formam a base de um triângulo até a estrela observada.

Sendo $r_T \ll D$, podemos aproximar $D = r_T/\theta$ onde θ é o ângulo ilustrado na figura ao lado. Com este método podemos chegar no máximo até distâncias da ordem de 100 parsecs e com isto calcular a distância de algumas milhares de estrelas de nossa galáxia. Da velocidade de aglomerados estelares é possível estimar também sua distância.

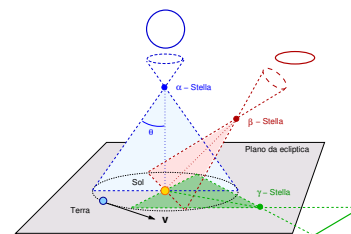


Figura 22.1: Método da paralaxe para medir distâncias de objetos até um $D \approx 100$ parsecs.

2. *Luminosidade*: o segundo degrau da escada é baseado na equação

$$\ell = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad \longrightarrow \quad D_L = \sqrt{\frac{4\pi L}{\ell}} \quad (22.1)$$

entre a luminosidade absoluta L de uma estrela que se encontra a uma distância D_L e a densidade de fluxo luminoso ℓ . Notem que diferenciamos entre a distância real D e a chamada distância de luminosidade D_L . Estas duas grandezas podem ser diferentes por dois motivos: por um lado há uma imprecisão natural nas medidas o que faz com que a distância D_L medida não seja exatamente a distância real entre objetos. Porém, um fator mais importante para que façamos a distinção é que devido à expansão do Universo, a densidade de fótons que atingem uma área sofre uma “diluição” à medida que se propaga como também esta expansão é responsável pela diminuição da energia do fluxo (para um universo que se expande) e conseqüentemente à diminuição da luminosidade. Isso será discutido com mais detalhes na próxima seção. O valor de L é obtido de estrelas próximas – cuja distância foi medida pelo degrau 1 – a partir da relação entre sua luminosidade absoluta e seu tipo espectral (temperatura de superfície) usando o diagrama de Hertzsprung-Russel. Com este método podemos chegar à distâncias de aproximadamente $40\,000$ ($4 \cdot 10^4$) parsecs.

3. *Estrelas variáveis*: para distâncias até a ordem de 10^7 parsec faz-se uso das estrelas variáveis (Cefeidas) baseado no uso da relação período-luminosidade (Lei de Leavitt) descoberto em 1908 pela astrônoma americana Henrietta Swan Leavitt que relaciona sua luminosidade com o período de pulsação destas estrelas (figura ao lado).

Com este método é possível chegar aos limites de nossa galáxia. Além destas distâncias até aproximadamente $3 \cdot 10^7$ parsec faz-se uso de *Novae*, das quais há aproximadamente 40 por galáxia ¹. Trata-se neste caso de sistemas binários com erupções repentinas de luminosidade, processo este provocado pela passagem de uma estrela por uma anã-branca massiva, provocando um aumento de luminosidade por um fator de 10^4 até 10^6 em poucos dias, para depois se esvanecer. A luminosidade máxima L_{max} está correlacionada ao tempo que a estrela leva para esvanecer. Calibrando esta luminosidade com aquela de *Novae* conhecidas e mais próximas, calcula-se a distância destes sistemas binários mais distantes. Pela observação de galáxias próximas à nossa observou-se que a luminosidade máxima de suas estrelas é a mesma e disto se pressupõe que este L_{max} valha para outras galáxias também. Porém para galáxias além de 10^7 parsec torna-se difícil distinguir estrelas de outras fontes cuja luminosidade

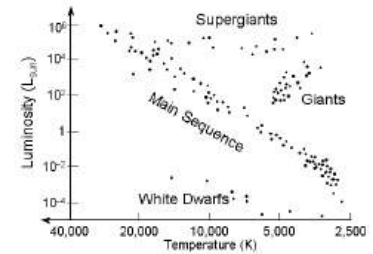


Figura 22.2: O diagrama de Hertzsprung-Russel, criado independentemente pelo astrônomo dinamarquês Ejnar Hertzsprung e o americano Henry Norris Russel, em 1910.

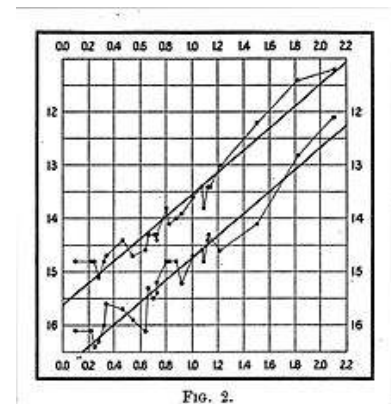


Figura 22.3: O diagrama original da relação entre período e luminosidade do artigo de Henrietta S. Leavitt em H. S. Leavitt and E. C. Pickering, *Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud*, Harvard College Observatory Circular. 173 (1912), 1–3. Versões modernas deste gráfico pode ser facilmente encontradas na internet.

¹ E. Rebhan, *op. cit.*, p. 382.

é parecida e portanto o método encontra seu limite de aplicabilidade em torno de $3 \cdot 10^7$ parsec.

4. *Supernovae tipo I e II*: o princípio é o mesmo das *Novae*, com a diferença da intensidade do brilho, de brilho muito mais intenso e portanto detectáveis de distâncias maiores. No caso das supernovas alcança-se limites da ordem de 10^9 pc.
5. *Supernovae do tipo Ia ou galáxias*: as maiores distâncias determinadas são aquelas de supernovas do tipo Ia ou usando-se o brilho de galáxias inteiras. De novo, pressupõe-se que as galáxias tenham um brilho máximo possível e o brilho de galáxias mais próximas é usada como parâmetro de calibragem. Com estas estrelas chega-se a distâncias de 10^{10} pc.

Os “degraus” da escada cósmica de distâncias são realmente degraus no sentido que cada um deles é garantido pelo degrau anterior. Cada um deles é calibrado usando-se as distâncias conhecidas obtidas em degraus inferiores. Isso significa também que as incertezas de um método se propagam para degraus superiores e a incerteza se torna maior quanto maiores as distâncias medidas. Isto pode ser observado claramente de maneira bastante drástica como historicamente a medida da constante de Hubble, que depende da medida de distâncias, passou de $540 \text{ km}/(\text{s Mpc})$ desde a época de Hubble ao valor atual de $69.8 \text{ km}/(\text{s Mpc})$. Porém, em especial a partir dos anos 90, as medidas feitas pelo Telescópio Hubble permitiram uma precisão grande de medidas na região de $D \leq 20 \text{ Mpc}$. Nesta região pode-se determinar com grande precisão a luminosidade de supernovas que são então usadas como parâmetros de distância. Nestes processos de medida foram observadas supernovas com $z \approx 2$, o que permitiu termos valores relativamente precisos de H_0 e q_0 .

22.2 Distâncias na métrica de FLRW

Até o momento ficamos restritos à métrica Euclideana. Isto se torna evidente quando definimos a densidade de luminosidade ℓ , calculada a partir da luminosidade absoluta L , como sendo o valor desta última dividida pela área de uma esfera de raio D . A questão que se nos apresenta é até que ponto os métodos apresentados acima precisam ser modificados ou não.

Olhemos primeiro para o processo de paralaxe, que nada mais é que um processo de triangulação. Considerando a métrica FLRW (eq. 21.5)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + r^2(\chi, k) \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right] \quad (22.2)$$

temos que a distância radiao da Terra à estrela é

$$D = R\chi \quad (22.3)$$

e identificamos o θ da paralaxe (no caso um θ muito pequeno) como sendo um $d\theta$ da métrica acima. Disto segue que a base Δ do triângulo é (v. eq. 21.3)

$$\Delta = f(\chi) d\theta \quad (22.4)$$

Como $R = D/\chi$ temos

$$D = \frac{\Delta}{d\theta} \frac{\chi}{f(\chi)}. \quad (22.5)$$

O fator $\chi/f(\chi)$ mede o efeito da curvatura do espaço. Observações nos levam a concluir que R é da ordem do tamanho do Universo observável (aprox. 10^{10} anos-luz) e uma vez que a triangulação se estende à distâncias $D \leq 10^2$ anos-luz, as correções devido à curvatura do universo são desprezíveis

$$\frac{f(\chi)}{\chi} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{D}{R}\right) = 1 + \mathcal{O}\left(10^{-8}\right) \quad (22.6)$$

Todos os degraus da escada cósmica que vem depois da triangulação baseiam-se na comparação de ℓ com L . Elas nos dão assim uma distância D_L que podemos relacionar à distância D real. Os fótons emitidos por um objeto à uma distância $D = R\chi$ de nós distribuem-se por uma superfície de área

$$A = 4\pi f^2(\chi) R^2(t_o) \quad (22.7)$$

onde estamos considerando fótons que estamos observado hoje (t_o). Uma vez que $g_{00} = 1$ todos os fótons emitidos num intervalo Δt na fonte chegam à nós também num intervalo Δt . Porém, devido à expansão do espaço estes fótons percorrem caminhos de diferentes comprimentos até chegarem a nós:

$$\Delta\chi_1 = \frac{c\Delta t}{R(t_1)} \quad \text{e} \quad \Delta\chi_o = \frac{c\Delta t}{R(t_o)} \quad (22.8)$$

Em universo que se expande ($R(t_o) > R(t_1)$) como o nosso, a densidade de fótons diminui e o fluxo de densidade ℓ que recebemos é reduzido por um fator $R(t_1) > R(t_o)$. O mesmo ocorre com a frequência, que muda por um fator da mesma ordem (segundo $R(t)\nu(t) = \text{constante}$) de tal maneira que a luminosidade aparente se reduz por um fator $[R(t_1) > R(t_o)]^2$:

$$\ell = \frac{L}{4\pi f^2(\chi) R^2(t_o)} \frac{R^2(t_1)}{R^2(t_o)}. \quad (22.9)$$

[O fator quadrático se deve que não apenas o número de fótons por m^2 diminui pela expansão do espaço – embora obviamente o número de

fótons se mantenha o mesmo – como pela expansão os fótons também perdem energia e isto afeta a luminosidade.]

Da definição de D_L temos

$$D_L = \frac{f(\chi) R^2(t_0)}{R(t_1)} = D(1+z) \frac{f(\chi)}{\chi} \quad (\text{FLRW}) \quad (22.10)$$

No último passo da equação acima usamos as identidades

$$\frac{R(t_0)}{R(t_1)} = 1+z \quad \text{e} \quad D = R(t_0)\chi. \quad (22.11)$$

Com isto estabelecemos, dentro da métrica FLRW, uma relação entre a distância de luminosidade D_L e a distância D . A aproximação $D \approx D_L$ dependem assim do desvio z para o vermelho e do fator $f(\chi)/\chi$ que é determinado pela curvatura do espaço. Para distâncias grandes, ou seja com grandes z , o desvio para o vermelho não pode ser desprezado.

22.3 Determinação de H_0 e q_0

Para discutirmos sobre a determinação da constante de Hubble e do parâmetro de desaleração, retomemos a equação (21.30) deduzida ao final do capítulo anterior:

$$z_{\text{cosmo}} \approx \frac{H_0}{c} D + \frac{1+q_0}{2c^2} H_0^2 D^2. \quad (22.12)$$

Várias distâncias e desvios z foram medidos e seus valores plotadas num gráfico $\log - \log$ na figura (21.1) no final do capítulo anterior. Observa-se que para no intervalo de algumas décadas a aproximação linear $z_{\text{cosmo}} \approx H_0 D/c$ é bastante boa, mas para objetos muito distantes há um desvio da reta. Destes resultados obtemos

1. A confirmação da hipótese que o Universo se expande de maneira homogênea e isotrópica, isto é com $\dot{R} > 0$ e
2. A determinação da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração.

Como mencionado acima, Hubble em 1929 mediu um valor de $540 \text{ km}/(\text{s Mpc})$. As medidas mais recentes (2019) colocam o valor da constante de Hubble em ²

$$H_0 = \left(69.8^{+1.9}_{-1.9} \right) \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \quad (22.13)$$

Este resultado é interpretado como dizendo que galáxias a 10^7 anos-luz de distância se afastam com uma velocidade de aproximadamente 200 km/s de nós ao passo que aquelas dez vezes mais distantes a uma velocidade de 2000 km/s . O parâmetro de desaleração tem o valor de ³

² L. Freedman Wendy et al., *The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch*, *The Astrophysical Journal* 882 (1) (2019), 34. arXiv:1907.05922.

³ T. Fließbach, *op. cit.*, p. 313.

$$q_0 = -0.50 \pm 0.03 \quad (22.14)$$

A razão principal da precisão das medidas atuais é telescópio Hubble. O valor negativo significa que a expansão está se acelerando.

Um ponto ainda que deve ser considerado nesta discussão diz respeito ao desvio para o vermelho causado pelos movimentos próprios da Terra, Sol e da Via Lactea que se sobrepõem ao efeito cosmológico. Temos

1. O movimento próprio do nosso ponto de observação de aproximadamente 400 km/s é uma combinação do movimento orbital em torno do Sol ($\sim 30 \text{ km/s}$), do Sol dentro da Via Lactea ($\sim 230 \text{ km/s}$) e Via Lactea (500 a 600 km/s).
2. Nossa galáxia pertence ao Aglomerado de Virgem. Junto com o Grupo Local, nossa galáxia se move com uma velocidade de aprox. 200 km/s para o centro do Aglomerado, que por sua vez se desloca com uma velocidade de $\sim 400 \text{ km/s}$ em direção ao Aglomerado de Hidra-Centauro. Para explicar este movimento foi cogitado nos anos 80 a existência de um super aglomerado atrás de Hidra-Centauro, chamado de Grande Atrator. Sua massa é estimada em $5 \cdot 10^{16} M_{\odot}$ e se encontrar a uma distância de 50 Mpc.

Como o movimento próprio da Terra corresponde à velocidades cósmicas em distâncias da ordem $D = 3 \cdot \cdot \cdot 10^7$ anos-luz, o movimento próprio só pode ser ignorado para distâncias superiores a aproximadamente $D > 3 \cdot 10^9$ anos-luz.

O estado do Universo

I don't pretend to understand the Universe – it's a great deal bigger than I am.
Thomas Carlyle, 1868.

A métrica de FLRW leva a várias possíveis soluções das Equações de Einstein. Baseados nos dados experimentais que hoje dispomos, é possível escolher um das soluções como sendo a mais adequada para descrever o estado atual do nosso Universo. Desde 1997 há um consenso de que vivemos em um Universo não curvo (ou com curvatura muito pequena) cuja expansão está acelerando. A dinâmica é dominada pelo termo cosmológico, que discutiremos aqui mais detalhadamente.

23.1 As componentes do substrato cósmico

A dinâmica do Universo como um todo, discutida no capítulo 20 é descrita pela equação (20.17). Esta equação expressa diretamente em termos de densidades tem a forma

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} (\rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_{\Lambda}) R^2 = -kc^2 \quad (23.1)$$

onde $\dot{R} = dR/dt$ e $\rho_{\Lambda} = c^2\Lambda/8\pi G$. Devido aos resultados mais recentes, podemos fatorar estas densidades em outras contribuições e atualmente se considera as densidades apresentadas na tabela abaixo como sendo relevantes para a dinâmica do Universo.

Componente	Densidade de Massa
matéria não relativística	ρ_{mat}
matéria relativística	ρ_{matrel}
matéria escura	contida em ρ_{mat} e ρ_{matrel}
neutrinos	ρ_{ν}
radiação (fótons, CBR)	ρ_{rad}
energia escura	ρ_{Λ}

Tabela 23.1: Diferentes constituintes do substrato cósmico que entram na equação (23.1).

Muita da pesquisa atual em cosmologia, seja ela teórica/computacional ou experimental com grande precisão os valores de cada uma destas densidades. A densidade de radiação no estágio atual do Universo é desprezível e podemos desconsiderá-la na equação para $R(t)$. Há ainda muita discussão e pesquisa sobre a contribuição dos neutrinos e podemos num primeiro momento desprezá-los também, bem com a matéria relativística que foi importante nos primeiros 400 milhões de anos após o Big-Bang mas hoje não mais.

No estudo desta equação se mostrou mais adequado introduzir a chamada *densidade de massa crítica*

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \stackrel{H=H_0}{=} 0.93 \times 10^{-26} \frac{kg}{m^3} \quad (23.2)$$

Com isto é possível introduzir para cada uma das densidades o conhecido parâmetro de densidade

$$\Omega \stackrel{def.}{=} \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (23.3)$$

que para os casos que nos interessam podem ser escritos como

$$\Omega_{mat} = \frac{\rho_{mat}(t_0)}{\rho_{crit}(t_0)}, \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (23.4)$$

Escrevendo o fator de escala, a constante de Hubble e o fator de desaceleração atuais como

$$R_0 = R(t_0), \quad \frac{H_0}{c} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R_0}, \quad q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}^2(t_0)} \quad (23.5)$$

podemos introduzir as variáveis adimensionais

$$x(\tau) = \frac{R(t)}{R_0}, \quad \text{com} \quad \tau = H_0 t. \quad (23.6)$$

Multiplicando agora (23.1) por c^2/H_0^2 e por $1/R_0^2$ podemos escrevê-la na forma

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_{mat}}{x} - \Omega_{\Lambda} x^2 = \Omega_k} \quad (23.7)$$

onde os Ω 's foram introduzidos acima. Pela definição de $x(\tau)$ segue que hoje, em $t = t_0$, temos

$$x(t = t_0) = 1, \quad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{t=t_0} = 1 \quad (23.8)$$

e portanto a equação (23.7) com estes valores se torna

$$\boxed{\Omega_{mat} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1} \quad (23.9)$$

Esta expressão é importante pois deixa claro o quão importante os parâmetros de densidade Ω_{mat} , Ω_{Λ} e Ω_k são para a dinâmica do nosso Universo. Em outras palavras a contribuição da massa, constante cosmológica e curvatura. É possível deduzir uma equação semelhante para q_0 . Para isto basta diferenciar a equação (23.1) em ct e obter

$$2\dot{R}\ddot{R} + \frac{K_{mat}\dot{R}}{R^2} - \frac{2}{3}\Lambda R\dot{R} = 0. \quad (23.10)$$

Multiplicando esta equação por R/\dot{R}^3 e tomando $t = t_0$ obtemos a equação

$$q_0 = \frac{\Omega_{mat}}{2} - \Omega_{\Lambda}. \quad (23.11)$$

A interpretação é clara: um valor de q_0 negativo como os resultados experimentais indicam atualmente, corresponde a uma expansão acelerada do Universo que, pela equação acima, implica que o termo cosmológico deve ser

$$\Omega_{\Lambda} > \frac{\Omega_{mat}}{2}. \quad (23.12)$$

O estado atual do Universo é descrito assim por cinco *parâmetros cosmológicos*, a saber

$$\text{estado do Universo} = (\Omega_{mat}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_k, H_0, q_0) \quad (23.13)$$

Porém, em função das equações (23.9) e (23.11), apenas 3 de um total de 5 parâmetros são independentes entre si. As grandezas independentes podem ser obtidas a partir de observações, como por nós já discutido no capítulo anterior:

1. A análise de supernovas do tipo Ia com o HST (*Hubble Space Telescope*) permitiram a determinar os valores de H_0 e q_0 .
2. Como terceira variável independente podemos escolher a densidade de matéria Ω_{mat} e determiná-la partindo do movimento das galáxias exteriores num aglomerado de galáxias. Isto permite determinar a massa de todo o aglomerado, cuja média indica hoje para uma densidade da ordem de $\Omega_{mat} = 0.3 \pm 0.1$ ¹.
3. A anisotropia da CMB foi medida com grande precisão pelo satélite Planck em 2013. A radiação cósmica de fundo se originou nos primórdios do Universo quando a matéria e radiação estavam ainda acopladas. A maneira como a anisotropia variou depende essencialmente da curvatura do Universo e os resultados indicam que $\Omega_k \approx 0$.

Os resultados mais precisos que dispomos para a curvatura são

$$\Omega_k = -0.023^{+0.017}_{-0.050} \quad (23.14)$$

¹ N. H. Bacall, J. T. Ostriker, S. Perlmutter, P. J. Steinhardt, *The cosmic triangle: revealing the state of the Universe*, 284 (2009), pp. 1481-1488.

que, em função da incerteza, justificam tomarmos $k \approx 0$. Os valores dos outros parâmetros Ω são

$$\Omega_{mat} = 0.273^{+0.031}_{-0.032} \quad \Omega_{\Lambda} = 0.686^{+0.020}_{-0.020}. \quad (23.15)$$

Isto significa que para o Universo como o conhecemos hoje os parâmetros são aproximadamente

$$(\Omega_{mat}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_k) = (0.3, 0.7, 0) \quad (23.16)$$

Até meados de 1997 o Universo de Einstein – de Sitter ($\Lambda = 0$, fig. 20.3) era o mais aceito, também pelo fato de sua simplicidade

$$(\Omega_{mat}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_k) = (1, 0, 0) \quad (\text{Einstein-de Sitter}) \quad (23.17)$$

Se $\Lambda = 0$ segue que $\Omega_k = 1 - \Omega_{mat}$. Este resultado implica que se $\Omega_{mat} = \rho/\rho_{crit} = 1$ a curvatura desaparece. Quando a densidade de massa é maior que ρ_{crit} a curvatura é positiva e o Universo passaria da atual expansão para uma contração (curva inferior da fig. 20.3). Uma densidade um pouco abaixo torna a curvatura negativa e consequentemente o Universo continuará a se expandir indefinidamente. Disto vem o termo *densidade crítica* que no entanto, em função dos dados observacionais mais recentes, deixou de fazer sentido.

23.2 Evolução temporal do parâmetro de escala $x(\tau)$

A evolução temporal do parâmetro $x(\tau)$ ou $R(t)$, como preferirmos, é dado pela integração da equação de movimento (23.7):

$$\tau = H_0 t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{\Omega_{mat}}{x'} + \Omega_{\Lambda} x'^2 + \Omega_k}} \quad (23.18)$$

A solução numérica desta integral usando os parâmetros de hoje, eq. (23.16), são ilustrados na figura abaixo. Esta integral nos permite

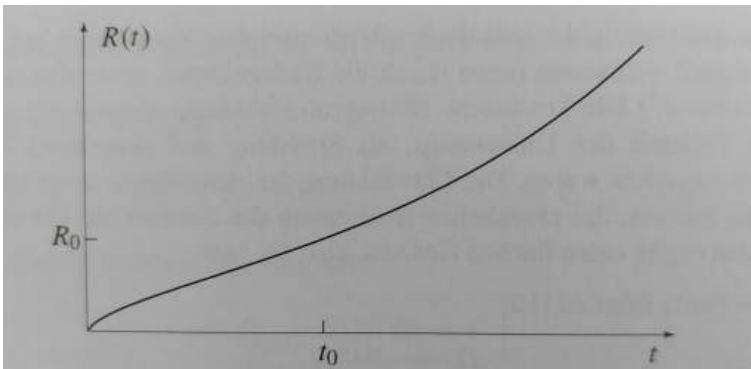


Figura 23.1: O fator de escala cósmico $R(t)$ como função do tempo t . Esta curva é a solução da equação (23.18) com os parâmetros cosmológicos da eq. (23.16). O valor atual é o dado por $R(t_0)$. Antes disso, para $t \ll t_0$ o termo dominante era Ω_{mat}/x . Hoje o termo dominante é $\Omega_{\Lambda}x^2$. Note na figura acima que houve uma mudança na inflexão da curva, e hoje temos uma expansão acelerada. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 326.

também calcular a idade do Universo. Considerando o instante inicial $t = 0$ quando $x = 0$ até os dias atuais $x = 1$ para $t = t_0$, temos

$$\begin{aligned} T_{\text{Universo}} &= t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{dx/dt} \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Omega_{\text{mat}}}{x} + \Omega_{\Lambda} x^2 + \Omega_k}} \\ &\approx 14 \cdot 10^9 \text{ anos} \end{aligned} \quad (23.19)$$

Sendo que segundo os parâmetros atuais o valor numérico da integral é de 0.964, é comum então afirmar que

$$T_{\text{Universo}} \approx \frac{1}{H_0} \quad (23.20)$$

23.3 Ω_{mat} e matéria escura

A densidade de matéria $\Omega_{\text{mat}} \approx 0.273$ pode ser obtida diretamente do estudo do movimento de aglomerados galácticos ou indiretamente do estudo da anisotropia da radiação cósmica de fundo (este ponto é discutido em mais detalhe na seção 24.3 do próximo capítulo). Uma parte ínfima deste valor corresponde à matéria bariônica visível Ω_b

$$\Omega_b = 0.048 \pm 0.005, \quad (23.21)$$

e o restante à chamada *matéria escura*

$$\Omega_{\text{darkmatter}} = 0.0225 \pm 0.03. \quad (23.22)$$

O efeito gravitacional da matéria escura é observado principalmente na velocidade orbital de galáxias em aglomerados galácticos. Por isto, o que designamos por densidade de matéria é na verdade a soma destas duas contribuições

$$\Omega_{\text{mat}} = \Omega_b + \Omega_{\text{darkmatter}}. \quad (23.23)$$

A matéria escura pode ser resultado dos seguintes objetos: anãs-brancas que esfriaram, anãs-marrons, gás intergaláctico, radiação de fundo de neutrinos com massa de repouso finita ² ou buracos negros supermassivos.

Na maioria das discussões desprezamos também o termo de densidade de radiação K_{rad} , como na equação (20.19). Caso não desprezemos este termo, obtemos um contribuição a mais do lado esquerdo de (23.7) da forma $-\Omega_{\text{rad}}/x^2$ onde $\Omega_{\text{rad}} = \rho_{\text{rad}}/\rho_{\text{crit}}(t_0)$. Isto significa que a equação (23.9) se torna

$$\Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1. \quad (23.24)$$

² Há toda uma área dentro da cosmologia dedicada ao estudo de neutrinos: *neutrino cosmology*. Um dos objetivos é responder justamente a questão da massa dos neutrinos e portanto de sua contribuição à dinâmica do Universo. o valor limite superior para a massa do neutrino se encontra, no momento em que escrevo estas notas, em $m_\nu \sim 0.16\text{eV}$, que corresponde à $3 \cdot 10^{-7} m_e$. Nos primórdios do Universo os neutrinos se comportavam como radiação, isto é $\rho_\nu \sim 1/R^4$. Hoje eles são classificados como matéria escura quente devido a sua alta velocidade – próxima a da luz – e sua densidade varia como da matéria normal, isto é $\rho_\nu \sim 1/R^3$. A melhor referência para a cosmologia de neutrinos é o livro de J. Lesgourgues, G. Mangano, G. Miele e S. Pastor, *Neutrino Cosmology*, Cambridge University Press, 2013. DOI:10.1017/CBO9781139012874.

Para nosso Universo nos dias atuais estima-se que

$$0.01 \leq \Omega_{rad}(t_0) \leq 0.05 \quad (23.25)$$

Isto significa que hoje ($x = 1$) o termo adicional $-\Omega_{rad}/x^2$ é desprezível face aos outros termos. Porém, como discutiremos no próximo capítulo, para $x \rightarrow 0$ este termo se torna dominante, o que significa que no início do nosso Universo a radiação era o fator preponderante da dinâmica do Universo. Hoje a densidade de radiação Ω_{rad} é basicamente devido a neutrinos (cuja massa de repouso é nula ou muito pequena). A contribuição dos fótons é de $\Omega_\gamma \approx 0.00005$ somente.

23.4 Ω_Λ : do que é feita a constante cosmológica?

A constante cosmológica, acredita-se hoje, é composta basicamente da chamada energia escura. Há também a suposição que ela corresponda à densidade de energia do vácuo, mas os resultados empíricos de $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ são incompatíveis com esta hipótese. Discutamos primeiro a energia do vácuo e depois façamos algumas considerações sobre a energia escura.

Energia do vácuo

Podemos escrever a constante cosmológica Λ na forma de uma densidade de energia $\rho_\Lambda c^2 = (c^4/8\pi G)\Lambda$. Como $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ segue que $\Lambda \approx 2H_0^2/c^2$. Com isto obtemos uma estimativa para ρ_Λ :

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda \approx \frac{H_0^2}{4\pi G} \approx 6 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}. \quad (23.26)$$

Com a estimativa desta densidade vamos agora estimar a qual densidade de energia do vácuo este valor corresponde. Da eletrodinâmica quântica sabemos que as flutuações quânticas do campo eletromagnético no vácuo correspondem a uma energia de vácuo da forma

$$E_0 = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\hbar\omega}{2} \sim V \hbar c k_{max}^4 \quad (23.27)$$

Da teoria quântica de campos podemos estimar o valor de corte do número de onda k_{max} , quando se leva em conta a gravitação, como sendo aquele dado pelo comprimento de Planck ℓ_P , ou seja

$$k_{max} \sim \frac{1}{\ell_P} = \sqrt{\frac{c^3}{\hbar G}}. \quad (23.28)$$

Com este valor de k_{max} obtemos para a densidade de energia do vácuo o valor

$$\rho_{vac} = \frac{E_0}{Vc^2} \sim \frac{c^5}{\hbar G^2} = \frac{m_P}{\ell_P^3} \approx 5 \cdot 10^{96} \frac{kg}{m^3}, \quad (23.29)$$

onde $m_P = \sqrt{\hbar c/G} = 2.2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$ é a massa de Planck. Este resultado para ρ_{vac} é o valor da ordem de grandeza da densidade de energia do vácuo em uma teoria quântica da gravitação. O valor experimental de ρ_Λ quando comparado a esta densidade teórica é praticamente igual a zero:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{vac}} = \frac{\text{valor experimental}}{\text{valor teórico}} \approx 10^{-123} \quad (23.30)$$

Esta discrepância entre valor medido e valor previsto é um dos grandes problemas ainda em aberto na física teórica.

Energia escura e pressão negativa

A estimativa acima deixa claro que estamos literalmente “no escuro” no que diz respeito à origem da constante cosmológica. Assim, em analogia à matéria escura, fala-se em uma *energia escura*.

Como bem sabemos, a matéria escura tem um efeito atrativo. Um valor positivo de Λ corresponde a um efeito repulsivo. Isto é fácil de entender pois olhando para a forma da equação (23.7), isto é $(dx/d\tau)^2 + V_{eff}(x) = const.$, os termos $V_{eff} = -\Omega_{mat}/x - \Omega_\Lambda x^2$ tem o mesmo sinal. Porém, a força $-dV_{eff}/dx$ que estes dois termos geram tem sinais contrários. No Universo hoje o termo em Ω_Λ domina e portanto o Universo sofre uma expansão acelerada.

Olhemos para isto em termos de pressão P_Λ associada à densidade ρ_Λ no tensor energia-momento. Quando o volume do Universo ou de aglomerados galácticos aumenta por um fator ΔV , a conservação de energia implica $\Delta E = 0 = (\rho_\Lambda c^2 + P_\Lambda) \Delta V$ e portanto

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 < 0 \quad (23.31)$$

e portanto temos um valor de pressão *negativo* na expressão (20.15).

Se $\Lambda > 0$ isto significa que ρ_Λ também é positivo. A pressão negativa explica o motivo pelo qual esta densidade atua de maneira repulsiva, algo fácil de entender se olharmos para as contas mas fisicamente ainda que causa uma certa surpresa. A origem desta densidade de energia ainda é um mistério. Há uma proposta que se trate de uma quinta força fundamental – batizada de *quintessência* – uma área ativa de pesquisa desde que foi sugerida por Ratra e Peebles em 1988³.

³ P. Ratra and L. Peebles, *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, Physical Review D. 37 (12) (1988), 3406–3427; J. P. Ostriker and P. Steinhardt, *The Quintessential Universe*, Scientific American 284 (1) (January 2001), 46–53.

O Modelo Padrão da Cosmologia

Os modelos atuais do Cosmos implicam que o fator de escala da métrica FRLW tendo a zero quando $t \rightarrow 0$, ou seja que nosso Universo tenha surgido de uma singularidade: o Big-Bang. A hipótese que o Universo se expande foi formulada por Lemaître em 1927. Uma vez que a contante de Hubble é positiva, a densidade do Universo primordial deve ter sido muito mais alta do que é hoje. Há evidências experimentais para um estado primordial do Universo como uma singularidade mas, ao nos aproximarmos dela, a teoria se torna mais e mais especulativa. Não sabemos a causa da singularidade ou o estado do Universo para $t < 0$. Nossa idéia neste capítulo é discutir um pouco mais estes pontos.

24.1 O cenário da evolução do Universo

À medida que $R \rightarrow 0$, a energia potencial gravitacional $E_{pot} \rightarrow -\infty$. Segundo as equações (20.18) e (20.22), a soma $E_{pot} + E_{cin}$ e a massa ρR^3 são constantes. Portanto, para $R \rightarrow 0$ tanto a massa quando a energia cinética E_{cin} tendem a ∞ . Na matéria muito densa, devido às interações, a energia cinética se distribui por todos os graus de liberdade disponíveis, o que significa que $T \rightarrow \infty$. À medida que R aumenta, a temperatura diminui em muitas ordens de grandeza e com isto uma série de diferentes interações e efeitos daí decorrentes. Este cenário é representado na figura abaixo: Vamos analisar mais detalhadamente este possível cenário da evolução do Universo, começando pelos dias atuais.

1. Hoje, isto é para $t = t_0 \approx 13 \cdot 10^9$ anos o Universo tem duas componentes principais:
 - (a) por um lado a radiação (gás de fótons) que define a temperatura do Universo. Esta conhecida *radiação cósmica de fundo* será discutida mais detalhadamente a seguir.

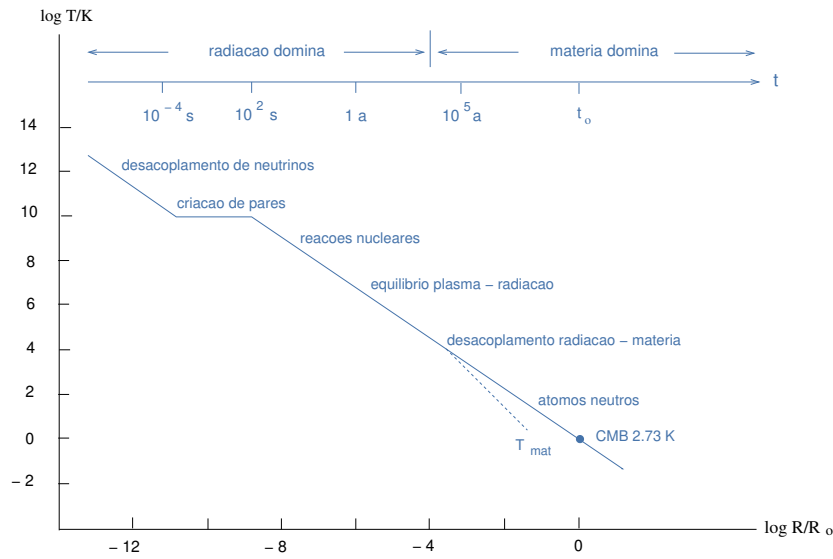


Figura 24.1: A temperatura T do Universo com função de seu tamanho relativo R/R_0 , onde R é o fator de escala da métrica de FLRW e R_0 seu tamanho atual. A linha pontilhada é explicada no texto. Fonte: T. Fließbach, *op. cit.*, p. 333.

- (b) Matéria na forma de galáxias e gás intergaláctico. Para $R > 10^{-3} R_0$, ou seja quando o Universo atingiu um milésimo do seu tamanho atual, houve um desacoplamento entre a radiação e a matéria. Se imaginarmos um gás de partículas materiais cuja temperatura T_{mat} depende apenas da expansão do Universo, então obtemos para a T_{mat} a linha pontilhada da figura acima. Porém, com o desacoplamento começam a se formar galáxias e estrelas, que *localmente* levam a um aumento de temperatura em função da contração gravitacional. Isto significa que não existe uma temperatura única para a matéria no Universo. Nas estrelas começa a haver a criação de elementos mais pesados.
- Para $T > 3000\text{ K}$ (ou $t < 4 \cdot 10^5$ anos) a matéria estava ionizada a tal ponto que surgiu um equilíbrio entre esta e a radiação. Para temperaturas ainda mais altas houve um equilíbrio entre o plasma e o gás de fótons.
 - Para $k_B T \sim 10 \dots 100\text{ keV}$, ou $t \sim 1\text{ h}$, começaram as reações nucleares. No tempo entre $t \sim 10^2$ a 10^4 s surgiram os núcleos de elementos mais leves (H , He e Li).
 - Para $k_B T \sim \text{MeV}$, ou $t \sim 2\text{ s}$, a radiação tem fótons de energia $E_\gamma > 1\text{ MeV}$, capazes assim de criarem pares elétron-pósitron e para temperaturas ainda mais altas, pares partícula-antipartícula mais pesados. Para bárions isto foi possível para $t < 10^{-4}\text{ s}$. Assim, a energia potencial gravitacional liberada pela expansão passa então, durante um tempo, a ir para estes novos graus de liberdade e não

para um aumento de temperatura. Isto explica o *plateau* na curva acima. Para outras partículas elementares há outros *plateaux*, por exemplo em torno de $k_B T \sim 2 \text{ GeV}$ isto ocorre para a produção de pares núcleon-antinúcleon.

5. Por final, para $R \rightarrow 0$ a temperatura se torna tão alta que adentramos a região de partículas elementares e das teorias de campo que as descrevem. O modelo padrão $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ de partículas é experimentalmente comprovado em regiões de energia da ordem de 100 GeV ou $T = 10^{15} \text{ K}$. Isto significa que a extrapolação feita na figura acima é baseada nas teorias que hoje conhecemos e portanto estas regiões são altamente especulativas. As conhecidas teorias de grande unificação (*GUT* ou *Grand Unified Theories*) que unificam as interações forte, fraca e eletromagnética fazem previsões para regiões de energia da ordem de $k_B T = 10^{14} \text{ GeV}$. Traduzidas para o modelo padrão da Cosmologia, estas energias correspondem à $t < 10^{-35} \text{ s}$ e portanto o Universo primordial seja talvez o único possível laboratório onde estas teorias podem ser testadas. Finalmente, para tempos menores que o tempo de Planck $t \leq t_P = \ell_P/c = (G\hbar/c^5)^{\frac{1}{2}} \approx 5 \cdot 10^{-44} \text{ s}$ é esperado que os efeitos quânticos da gravitação sejam mais importantes.
6. Na TGR clássica não há como evitar uma singularidade em $R = 0$. O surgimento de nosso Universo desta singularidade é o conhecido *Big-Bang*¹.

24.2 Relação entre temperatura T e $R(t)$

Queremos agora determinar a relação que existe entre a temperatura do Universo e o fator de escala cósmico $R(t)$. Quando falamos de temperatura do Cosmos estamos nos definindo à temperatura do gás de fótons que pervade todo o Universo pois, como mencionado acima, localmente há diferentes temperaturas e desde o desacoplamento da matéria e radiação, suas respectivas temperaturas são diferentes. Depois do desacoplamento a temperatura da radiação é a única que pode ser univocamente definida para todo o Universo. Antes do desacoplamento, quando $R < 10^{-3} R_0$, a temperatura T também era a temperatura da matéria pois esta se encontrava em equilíbrio com a radiação.

A densidade $\rho_{rad} c^2$ da radiação é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann

$$\rho_{rad} c^2 = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3} T^4. \quad (24.1)$$

Porém, segundo (20.18) vale

$$\rho_{rad} = \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{K_{rad}}{R^4} = \frac{const}{R^4} \quad (24.2)$$

¹ Lemaître cunhou o termo *átomo primevo*, baseado na sua idéia que o Universo surgiu de uma singularidade. O físico russo-americano George Antonovich Gamow (1904-1968) foi quem trabalho e difundiu a teoria, mais tarde cunhada de *Big-Bang* por John Archibald Wheeler (1911 - 2008). Gamow foi inicialmente aluno de Friedmann mas teve que mudar de orientador com a morte prematura deste. Quando estudante em São Petersburgo ele formava com Lev Davidovich Landau (1908-1968), Matvei Petrovich Bronstein (1906-1938) e Dimitri Dimitrievich Ivanenko (1904-1994) o famoso grupo auto-intitulado "Os três mosqueteiros", que se reunia para discutir problemas fundamentais de física. Bronshtein, considerado o pioneiro da gravitação quântica, foi preso e executado durante os expurgos stalinistas. Há desde 2013 uma medalha conferida a postdocs que trabalham em gravidade quântica e que leva seu nome. Landau quase foi morto durante os expurgos e Gamow emigrou em 1933. Ivanenko chegou a ser exilado na Sibéria (Tomsk) mas foi logo reabilitado. Todos se tornaram expoentes nas mais diversas áreas, mas particularmente em Cosmologia e Gravitação.

e portanto, comparando as duas equações, segue que

$$T = \left(\frac{45\hbar^3 c^7}{8\pi^3 G k_B^4} \right)^{1/4} \frac{1}{R} = \frac{const}{R}. \quad (24.3)$$

Em um gráfico em escala $\log - \log$ esta equação nos dá uma reta com coeficiente angular -1 . Após o desacoplamento a matéria pode ter qualquer temperatura. Para efeito de cálculo, consideremos átomos neutros de massa m e momento médio p . Usando a relação (21.22)

$$k_B T_{mat} \approx \frac{p^2}{2m} \stackrel{(21.22)}{\propto} \frac{1}{R^2} \quad (24.4)$$

Esta é a reta de coeficiente angular -2 na figura 24.1. Esta figura baseia-se nestes cálculos, a menos do trecho onde há um *plateau* (criação de pares). A relação $\rho_{rad} R^4 = const.$ se aplica unicamente às regiões de desacoplamento $R > 10^{-3} R_0$ e na região onde a radiação domina $R < 3 \cdot 10^{-4} R_0$. Na região intermediária há desvios deste comportamento mas para efeitos de discussão qualitativa, este gráfico representa bem o cenário evolutivo de nosso Universo.

24.3 Radiação Cósmica de Fundo

A que estamos nos referindo quando dizemos que há um desacoplamento entre radiação e matéria? A interação eletromagnética entre fótons e partículas carregadas, sejam elas partículas elementares ou íons, acabam levando a um equilíbrio termodinâmico entre eles. Quanto a temperatura é inferior a 3000 K formam-se majoritariamente átomos neutros. A densidade de matéria carregada torna-se então tão pequena que a interação desta com a radiação é mínima comparada com a totalidade da matéria neutra: falamos neste caso de um desacoplamento entre a matéria e a radiação. No momento do desacoplamento a matéria e a radiação se encontram em equilíbrio e portanto têm a mesma temperatura. No caso da matéria, temos uma distribuição de Boltzmann e os fótons seguem uma distribuição de Planck para a radiação.

Olhemos para o que acontece com a evolução da radiação de corpo negro após o desacoplamento. Neste fase, processos de emissão e absorção ou espalhamento fóton-fóton não tem um papel preponderante e, como mostraremos abaixo, a distribuição não muda à medida que o Universo se expande. O único efeito da expansão é fazer com que a temperatura da distribuição diminua com o tempo.

Denotemos o momento do desacoplamento de t_d . A densidade de fótons no intervalo de frequência entre ω' e $\omega' + d\omega'$ vale

$$n'(\omega', t_d) d\omega' = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega'^2 d\omega'}{\exp(\hbar \omega' / k_B T_d) - 1} \quad (24.5)$$

onde $T_d = T(t_d) \approx 3000 K$. Calculemos agora como esta distribuição muda à medida que o Universo se expande. A mudança de frequência, como pudemos ver no capítulo 20, segue a equação (??). Um fóton de frequência ω' no tempo t_d terá no tempo t a frequência ω dada por

$$\omega = \frac{R(t_d)}{R(t)} \omega'. \quad (24.6)$$

[Isso nada mais é que a descrição do desvio para o vermelho.] Uma vez que a densidade de fótons é o número destes por unidade de volume, temos que $n \propto 1/R^3$. Disto segue que

$$n(\omega, t) d\omega = \left[\frac{R(t_d)}{R(t)} \right]^3 n'(\omega', t_d) d\omega'. \quad (24.7)$$

Substituindo nesta equação o valor de $n' d\omega'$ da equação (24.5) e escrevendo ω' como função de ω segundo (24.6) chegamos à

$$n(\omega, t) d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T_d - 1)} \quad (24.8)$$

onde

$$T = T(t) = \frac{R(t_d)}{R(t)} T_d \quad T \text{ da radiação cósmica de fundo} \quad (24.9)$$

O desacoplamento ocorreu numa época em que o Universo era relativamente novo. Isto ocorreu, como veremos a seguir, em $t_d \approx 4 \cdot 10^{-5} t_0$. Isto significa que a radiação de Planck que hoje observamos deve ter uma temperatura $T(t_0)$ relativamente baixa, mas ainda observável. Esta radiação foi prevista por Alpher e Herman em 1949². Em 1965 Penzias e Wilson descobriram a *radiação cósmica de fundo* com uma temperatura aproximada de 3 K, que corresponde a um comprimento de onda de $\lambda = 7.35 \text{ cm}$. Experimentos mais recentes colocam esta temperatura da radiação de fundo em

$$T_0 = T(t_0) = 2.725 \pm 0.001 K \quad (24.10)$$

Com este valor é possível determinar a densidade de massa $\rho_{rad}(t_0)$ hoje. Ela pode ser calculada a partir da distribuição de Planck (24.8) ou da Lei de Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned} \rho_{rad}(t_0) &= \frac{1}{c^2} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega n(\omega, t_0) \\ &= \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^5} T_0^4 \\ &= 4.8 \cdot 10^{-31} \frac{kg}{m^3} \end{aligned} \quad (24.11)$$

Desconsiderando o efeito Doppler devido ao movimento próprio de nossa galáxia, esta radiação de fundo é em grande medida isotrópica.

² R. A. Alpher and R. C. Herman, *Phys. Rev.* 75 (1949), 1089. Há uma estória interessante pois Ralph Alpher era aluno de doutorado de Gamow e em 1948 publicaram um trabalho na *Physical Review* mostrando que durante o Big-Bang haveria a criação de *H*, *He* e elementos mais pesados que explicaria sua abundância no Universo. Segundo Gamow, o artigo ficou conhecido como o *alphabetical paper* pois os nomes dos autores remetiam à primeira e terceira letras do alfabeto grego: α e γ . Gamow então achou injusto que a letra β ficasse de fora e por isto incluiu o nome do físico Hans Bethe como coautor. Ainda hoje o paper é conhecido como $\alpha\beta\gamma$ -paper de Alpher, Bethe e Gamow.

Observações feitas com o satélite Planck mostraram porém que há pequenas flutuações em determinadas direções do céu da ordem de

$$\frac{\Delta T}{T_0} \sim 10^{-5}. \quad (24.12)$$

Estas pequenas variações em torno do valor T_0 são de bastante interesse para os pesquisadores: se o Universo no momento do desacoplamento fosse totalmente isotrópico, hoje ele também o seria. Porém quando isto ocorreu havia pequenas flutuações de densidade que se tornaram mais pronunciadas com a evolução do Universo e que acabaram levando à formação de galáxias e aglomerados galácticos. Estas flutuações se faziam presentes tanto na matéria quanto na radiação. A partir do momento em que houve o desacoplamento, a evolução da radiação de fundo é determinada apenas pelos parâmetros cosmológicos globais e, como mostraram alguns estudos, este desenvolvimento depende essencialmente apenas da curvatura do Universo: uma curvatura positiva funciona no sentido de focar a radiação, uma curvatura negativa no sentido de desfocar. Assim, a distância entre dois picos como função da distribuição angular diminui ou aumenta, dependendo da curvatura ser positiva ou negativa. Os resultados do experimento Planck levam à conclusão que a curvatura do Universo é muito próxima de zero, $\Omega_k \approx 0$.

A fraca dependência das distribuição $T(\theta, \phi)$ com o ângulo implica que no momento do desacoplamento o Universo era altamente homogêneo e isotrópico. Esta distribuição hoje observada justifica assim a adoção do *Princípio Cosmológico* como ponto de partida de nossa análise. A existência de galáxias é um indicativo das pequenas variações na isotropia e homogeneidade das distribuições na ocasião do desacoplamento. Devemos notar porém que estes resultados não estão contidos nos modelos cosmológicos por nós estudados e eventualmente adotados, pois eles partem da idéia de médias feitas sobre regiões muito grandes do Universo.

24.4 Escala temporal

Para estudar a evolução temporal de nosso Universo podemos usar a eq. (20.19) ou (23.7). A solução (23.18) destas equações não se torna mais complexa se introduzimos no numerador o fator Ω_{rad}/x'^2 . Este fator se torna importante para $x' \ll 1$, ou seja, para quando o Universo era jovem. Porém, ao invés de uma solução numérica, busquemos aqui soluções analíticas usando algumas aproximações convenientes. Com estas aproximações podemos então estimar os tempos por nós usados na figura (24.1).

A curvatura do Universo é tão pequena que podemos desprezá-la

na equação para $R(t)$. Partiremos assim de (20.19) com $k = 0$:

$$\dot{R}^2 = \frac{K_{rad}}{R^2} + \frac{K_{mat}}{R} + \frac{1}{3} \Lambda R^2. \quad (24.13)$$

Em função da potência em R de cada contribuição do lado direito desta equação fica claro que o termo de radiação domina para tempos pequenos (R pequeno) e o termo cosmológico Λ para tempos grandes (R grande). Entre estes dois extremos quem domina é o termo da matéria. Se considerarmos apenas os termos dominantes temos

$$\dot{R}^2 \sim \begin{cases} K_{rad}/R^2 \\ K_{mat}/R \\ \Lambda R^2/3 \end{cases}, \quad R(t) \sim \begin{cases} t^{1/2} & (0 < t < t_1) \\ t^{2/3} & (t_1 < t < t_2) \\ e^{\sqrt{\Lambda/3}ct} & (t > t_2) \end{cases} \quad (24.14)$$

Tentemos agora estimar os tempos de transição t_1 , da fase sob domínio da reação para domínio da matéria e t_2 , quando o termo cosmológico Λ passa a dominar. Para fazer isto podemos calcular os valores atuais das forças que cada termo do lado direito de (24.13) nos dá e suas respectivas razões:

$$\left. \frac{2K_{rad}/R^3}{K_{mat}/R^2} \right|_{t_0} = \frac{2\rho_{rad}(t_0)}{\rho_{mat}(t_0)} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (24.15)$$

$$\left. \frac{\Omega_{mat}/x^2}{2\Omega_{\Lambda}x} \right|_{t_0} = \frac{2\Omega_{mat}}{2\Omega_{\Lambda}} \approx 0.2 \quad (24.16)$$

O fator de 2 surge do fato que as forças são as derivadas dos termos respectivos em R ou x . Os valores das densidades para ρ_{rad} é o da equação (24.11) e a de $\rho_{mat} = 3.1 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ obtemos a partir das equações (23.4), (23.2) e (23.16). Na equação (23.19) usamos as relações em (23.7) junto com $x(t_0) = 1$ bem como o valor de (23.16). Os tempos de transição seguem das equações abaixo:

$$\frac{2K_{rad}/R(t_1)^3}{K_{mat}/R(t_1)^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad R(t_1) \approx 3 \cdot 10^{-4} R_0 \quad (24.17)$$

$$\frac{\Omega_{mat}/x(t_2)^2}{2\Omega_{\Lambda}/x(t_2)} = 1 \quad \longrightarrow \quad R(t_2) \approx 0.6 R_0 \quad (24.18)$$

Da condição representada pelo lado esquerdo das equações acima e os valores de (23.18) e (23.19) podemos determinar assim a relação R/R_0 . A dominância da radiação para a matéria ocorreu muito cedo na história do Universo, quando $R(t_1) \ll R_0$. A passagem da dominância da matéria para a constante cosmológico ocorreu relativamente mais tarde, quando $R(t_2) \sim R_0$, o que significa que a era regida por Λ ainda não é ainda fortemente marcada por esta. O desacoplamento entre radiação e matéria ocorre com uma temperatura global da ordem de

3000 K , como já dito anteriormente. Uma vez que $T(t) \propto 1/R(t)$ (eq. 24.9) e com o valor atual de T obtemos

$$\left. \begin{array}{l} T(t_0) \approx 3 K \\ T(t_d) \approx 3000 K \end{array} \right\} \rightarrow R(t_d) = \frac{T(t_0)}{T(t_e)} R_0 \approx 10^{-3} R_0 \quad (24.19)$$

Com este resultado temos agora os raios $R(t_1)$, $R(t_2)$ e $R(t_d)$ associados aos diferentes tempos de transição. Falta agora determinarmos os tempos propriamente ditos. A solução da primeira linha de (24.14), $dR^2/d(ct)^2 = K_{rad}/R^2$ é

$$R(t) \approx (4K_{rad}c^2)^{1/4} \sqrt{t} \approx R_0 \sqrt{\frac{t}{10^{12}a}} \quad (24.20)$$

No último passo na equação acima usamos o valor de K_{rad} de (20.18) com ρ_{rad} dada por (24.11). Com (24.20) determinamos t_1 :

$$t_1 = \left(\frac{R(t_1)}{R_0} \right)^2 10^{12} a \stackrel{(24.17)}{=} (3 \cdot 10^{-4}) 10^{12} a \approx 10^5 a \quad (24.21)$$

A solução da segunda linha da equação (24.14), $dR^2/d(ct)^2 = K_{mat}/R$ é $R(t) = const \cdot t^{2/3}$. Ou seja, juntando os resultados temos

$$R(t) \approx R_0 \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{t}{10^{12}a}} & (0 \leq t < 10^5 a) \\ \left(\frac{t}{15 \cdot 10^9 a} \right)^{2/3} & (10^5 a < t \leq t_0/2) \end{cases} \quad (24.22)$$

Estas são aproximações simples e podem obviamente ser bastante imprecisas. A estimativa da constante em $R(t) = const \cdot t^{2/3}$ pode ser feita de duas maneiras: primeiro considerando a continuidade da solução da equação da primeira linha no tempo $t_1 = 10^5 a$ nos leva à

$$const = \frac{R_0}{(18 \cdot 10^9 a)^{2/3}} \quad (24.23)$$

A segunda aproximação pode ser obtida pelo continuidade da solução $R(t) = const \cdot t^{2/3}$ em t_0 , o que leva à

$$const = \frac{R_0}{t_0^{2/3}} = \frac{R_0}{(13 \cdot 10^9 a)^{2/3}} \quad (24.24)$$

O valor que usamos em (24.22) é a média entre estes dois valores. A solução exata para $R(t)$ pode ser obtida da equação (23.18), quando introduzimos o termo da radiação a ela. O pequeno desvio que isto causa na figura (23.1) devido à introdução do termo da radiação Ω_{rad}/x'^2 é imperceptível na escala usada, e se encontra muito próxima da origem do eixo de coordenadas pois $t_1/t_0 < 10^{-5}$. Nesta região a solução $R(t) \propto t^{2/3}$ é substituída por $R(t) \propto t^{1/2}$. Isto porém não muda nada na solução (23.19) para a idade do Universo.

A

Tangentes e Geodésicas

Um dos conceitos mais importantes na Geometria Diferencial em geral e na TRG em particular é o de curvas, pois elas eventualmente descrevem a trajetória de partículas ou corpos que queremos estudar. Dentre estas curvas, uma que merece especial destaque é a chamada *curva geodésica* ou simplesmente *geodésica*. Definindo-a rapidamente podemos dizer que

A geodésica é a menor distância entre dois pontos. Seguir uma geodésica significa andar em linha 'reta'.

No espaço plano as geodésicas são retas. Já superfícies esféricas elas são os grandes círculos, ou seja os círculos cujos centros coincidem com a centro da esfera. Por exemplo, os meridianos na superfície do nosso globo são grandes círculos, bem como a linha do Equador. Isto está ilustrado nas figuras ao lado.

Vamos imaginar uma curva qualquer no espaço parametrizada por uma variável qualquer t (geralmente pensamos em t como sendo o tempo na mecânica. Porém t pode ser uma variável qualquer). Podemos imaginar esta curva como sendo dada por funções diferenciáveis $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$. Qualquer ponto sobre esta curva é dado pelo vetor posição \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ &= x(u, v, w)\hat{i} + y(u, v, w)\hat{j} + z(u, v, w)\hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

O vetor tangente à curva é dado, obviamente, por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \frac{dw}{dt}. \quad (\text{A.2})$$

Lembrando-nos da definição dos vetores da base tangente (contravariantes) como sendo

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.3})$$

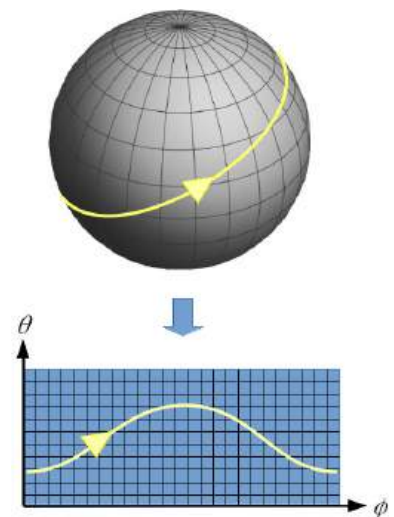


Figura A.1: As geodésicas sobre a superfície da esfera são chamadas de grandes círculos, como a linha amarela acima. Os meridianos também são grandes círculos.



Figura A.2: A menor distância por exemplo entre o Aeroporto de Frankfurt e o de Haneda, no Japão, é dada pelo arco de um grande círculo. Essas são as rotas seguidas pelos aviões que ligam estas cidades.

temos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{du}{dt} \mathbf{e}_u + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_v + \frac{dw}{dt} \mathbf{e}_w \\ &= \dot{u}(t) \mathbf{e}_u + \dot{v}(t) \mathbf{e}_v + \dot{w}(t) \mathbf{e}_w \\ &= \dot{u}^i(t) \mathbf{e}_i \quad (\text{notação de Einstein})\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Embora isto possa parecer um pouco estranho inicialmente, na verdade estas curvas nos são familiares, como no caso em que parametrizarmos o movimento retilíneo uniforme de um corpo no \mathbb{R}^3 :

$$x = x_0 + v_{0x} t, \quad y = y_0 + v_{0y} t, \quad z = z_0 + v_{0z} t, \quad (\text{A.5})$$

dadas as condições iniciais $\mathbf{r}(t = 0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. O parâmetro t neste caso é realmente o tempo. A equação logo acima leva trivialmente à

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j} + v_{0z} \hat{k} \quad (\text{A.6})$$

que nos diz que a velocidade, como bem o sabemos, é tangente à trajetória. Um outro exemplo é a velocidade em coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Um resultado geral e muito importante que obtemos disto é que o comprimento da curva (no caso acima a distância percorrida) é dado pela integral de $|\dot{\mathbf{r}}|$ em relação à variável t ($s = vt$). Assim, no caso de variáveis arbitrárias (u, v, w) devemos primeiro calcular

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}^2 &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{u}^i(t) \mathbf{e}_i \cdot \dot{u}^j(t) \mathbf{e}_j \\ &= \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}_{=g_{ij}}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

de onde obtemos a expressão

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)}. \quad (\text{A.9})$$

Disto segue que o comprimento da curva é, para o intervalo $a \leq t \leq b$, igual à

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt. \quad (\text{A.10})$$

A versão infinitesimal do comprimento é dado simplesmente por

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = du^i \mathbf{e}_i \cdot du^j \mathbf{e}_j = g_{ij} du^i du^j \quad (\text{A.11})$$

Este resultado é muito importante e o usaremos ao longo de todo nosso curso. Apenas para que fixemos as idéias, lembremos que, em coordenadas esféricas a equação (A.8) vale:

$$\begin{aligned} v^2 &= \underbrace{\dot{r}^2 \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}_{=1} + \underbrace{\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta}_{=r^2} + \underbrace{\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi}_{=r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Este resultado é conhecido da Mecânica Clássica.

Exemplo: 1.3.1 (Foster & Nightingale)

Vamos tomar o exemplo que descreve a equação da figura ao lado sobre a superfície da esfera de raio $r = a$.

As equações que definem esta curva são

$$u^1 = r = a, \quad u^2 = \theta = t, \quad u^3 = \varphi = 2t - \pi \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (\text{A.13})$$

O vetor tangente à curva tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \dot{u}^i &= \dot{r} \delta_1^i + \dot{\theta} \delta_2^i + \dot{\varphi} \delta_3^i \\ &= \dot{\theta} \delta_2^i + \dot{\varphi} \delta_3^i \\ &= \delta_2^i + 2\delta_3^i \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Em outras palavras

$$\dot{u}^1 = 0, \quad \dot{u}^2 = 1, \quad \dot{u}^3 = 2. \quad (\text{A.15})$$

Não podemos nos esquecer que estamos tratando de coordenadas esféricas, e portanto o elemento de linha na métrica esférica é dado por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi. \quad (\text{A.16})$$

Disto tiramos que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Já o elemento de comprimento ao longo da curva é dado, segundo a definição, por

$$dl = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt \quad (\text{A.18})$$

Calculando isto explicitamente temos (lembrando que neste exemplo o parâmetro $t = \theta$)

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{g_{11} \dot{u}^1 \dot{u}^1 + g_{22} \dot{u}^2 \dot{u}^2 + g_{33} \dot{u}^3 \dot{u}^3} dt \\ &= \sqrt{g_{11} [\dot{u}^1]^2 + g_{22} [\dot{u}^2]^2 + g_{33} [\dot{u}^3]^2} dt \\ &= \sqrt{(1 \times 0 + r^2 \times 1 + r^2 \sin^2 \theta \times 2)} dt \\ &= \sqrt{a^2 + 4a^2 \sin^2 t} dt \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

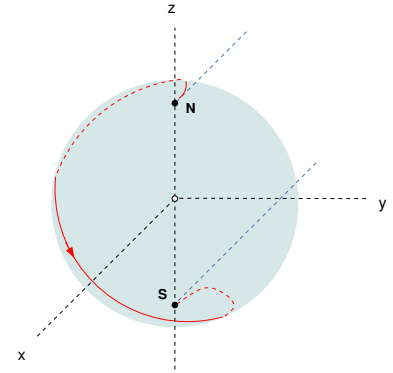


Figura A.3: Curva parametrizada por $r = a$, $u^2 = \theta$, $\varphi = 2\theta - \pi$.

Disto segue que o comprimento da curva, do Polo Norte ao Polo Sul vale

$$L = \int_0^\pi a^2 \sqrt{1 + 4 \sin^2 t} dt \quad (\text{A.20})$$

O que é uma reta?

Precisamos ter uma noção clara do que é uma “reta” em espaços curvos. Vamos ver aqui duas definições. A primeira é a definição do Foster e Nightingale. A segunda é a definição de Hans Stephani. Na verdade ambas as definições são equivalentes, elas são apenas diferentes maneiras de chegar a um mesmo resultado. Qual nosso objetivo? Nosso objetivo é chegar numa equação da “reta” – e por “reta” entendemos a menor distância entre dois pontos – que valha em qualquer tipo de espaço. Vamos então às definições.

Definição 1. Foster e Nightingale

O que define uma reta é que os vetores tangentes apontam todos na mesma direção. Podemos calcular o vetor tangente como fizemos acima. Porém a experiência mostra que se usarmos como parâmetro não um t qualquer mas o comprimento s da curva a partir de uma certa origem, o vetor tangente λ é unitário e portanto de módulo constante. Isto é importante pois se queremos definir uma curva geodésica a partir de um vetor tangente que não varia, temos que garantir que não apenas sua direção como também seu módulo não variem. Podemos verificar que o módulo é 1 caso o parâmetro seja s pois

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = [du^i \mathbf{e}_i] \cdot [du^j \mathbf{e}_j] \quad (\text{A.21})$$

Dividindo ambos os lados por ds^2 obtemos

$$\frac{ds^2}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} \mathbf{e}_i \cdot \frac{du^j}{ds} \mathbf{e}_j \quad (\text{A.22})$$

ou seja,

$$1 = \lambda \cdot \lambda \rightarrow |\lambda| = 1 \quad (\text{A.23})$$

Portanto, se o vetor tem módulo constante e aponta sempre na mesma direção temos

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Para facilitar as contas vamos escrever $\lambda = \lambda^i \mathbf{e}_i$. Temos então

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d(\lambda^i \mathbf{e}_i)}{ds} = \dot{\lambda}^i \mathbf{e}_i + \lambda^i \dot{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.25})$$

O último termo desta igualdade surge pelo fato que em coordenadas curvilíneas os vetores da base tangente mudam dependendo da posição do espaço onde se encontram. Eles não apenas mudam de magnitude como de direção também. Um exemplo simples é dos vetores \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_φ em coordenadas polares, cuja magnitude depende das coordenadas (r, θ, φ) do ponto onde se encontram. O vetor \mathbf{e}_r tem magnitude constante mas sua direção varia no espaço. É de se esperar que qualquer variação dos vetores \mathbf{e}_i possa ser escrita como

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j} \frac{du^j}{ds} = \partial_j \mathbf{e}_i \frac{du^j}{ds} \quad (\text{A.26})$$

A variação infinitesimal de um vetor pela variação infinitesimal dos u^j é um vetor e portanto pode ser escrito como uma combinação de vetores da base:

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (\text{A.27})$$

Os Γ são uma medida da variação dos vetores da base quando as coordenadas do ponto variam. Em outras palavras, podemos escrever:

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} ij \rightarrow & 1^\circ \text{ subíndice: qual vetor da base varia } (\mathbf{e}_i) \\ & 2^\circ \text{ subíndice: o quê varia (coordenada } j). \\ k \rightarrow & \text{a componente } k \text{ da variação do vetor da base.} \end{cases}$$

Definição: o símbolo Γ_{ij}^k , chamado de símbolo de Christoffel, é a k -ésima componente do vetor que mede a variação, por unidade de comprimento, do vetor da base \mathbf{e}_i causado pela variação infinitesimal da coordenada u^j .

Por exemplo, em coordenadas cartesianas os símbolos de Christoffel são iguais a zero pois os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são invariantes, isto é, são iguais em todos os pontos do espaço e não variam por uma variação infinitesimal dx , dy ou dz . Antes de olharmos para um exemplo prático de como calcular estes símbolos, voltemos à equação (A.25) que, combinada com (A.27), nos leva à

$$(\dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{u}^k) \mathbf{e}_i = 0 \quad (\text{A.28})$$

Uma vez que $\dot{\lambda}^i = \dot{u}^i = du^i/ds$ obtemos finalmente

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (\text{A.29})$$

Esta é a equação da curva geodésica num sistema de coordenadas arbitrário. Para calculá-la porém temos que saber quem são os símbolos de Christoffel. De alguma maneira eles devem conter em si informações sobre a métrica do espaço pois na equação acima, de alguma forma, a métrica deve aparecer. Podemos fazer isto olhando para a definição

da curva geodésica de Hans Stephani que, além de sua elegância, nos permite também chegar a uma definição dos símbolos de Christoffel e sua relação com a métrica.

Definição 2. Hans Stephani

A definição de Stephani ¹ é bastante elegante pois é baseada na formulação Lagrangeana da Mecânica Clássica. Esta mesma abordagem, pela sua elegância, é seguida também por Landau e Lifshitz.

Começemos pela Lagrangeana de uma partícula livre de massa m que se desloca com velocidade v

$$L = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (\text{A.30})$$

Lembremos que

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \rightarrow \mathbf{v} = \dot{x}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (\text{A.31})$$

e portanto

$$\mathbf{v}^2 = (\dot{x}^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\dot{x}^\beta \mathbf{e}_\beta) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (\text{A.32})$$

Podemos obter a equação de movimento deste corpo por meio das equações de Lagrange do segundo tipo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\text{A.33})$$

Fazendo as derivadas temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = m g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = L_{,\nu} = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (\text{A.34})$$

Notem que introduzimos aqui uma nova notação: $f_{,xi} = \partial f / \partial x^i$ para derivadas parciais. Uma vez que na TGR estamos sempre trabalhando com muitos índices, derivadas e somatórias, estas notações tem por objetivo dar às equações uma aparência mais leve. É importante ver como obtivemos o primeiro termo da equação acima pois muitas vezes nos esquecemos da convenção de Einstein e deixamos uma das derivadas de lado. Vamos assim escrever a somatória explicitamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \dot{x}^\nu} \dot{x}^\beta + \dot{x}^\alpha \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \dot{x}^\nu} \right] \\ &= \frac{m}{2} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} \left[\delta^\alpha_\nu \dot{x}^\beta + \delta^\beta_\nu \dot{x}^\alpha \right] \\ &= \frac{m}{2} \sum_\beta g_{\nu\beta} \dot{x}^\beta + \frac{m}{2} \sum_\alpha g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

¹ H. Stephani, *General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field*, Cambridge University Press, 1982, pp. 4-7

Como os índices α e β das somatórias são mudos e $g_{\nu\beta} = g_{\beta\nu}$ podemos simplesmente substituir na primeira somatória $\beta \rightarrow \alpha$ e escrever

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \sum_{\beta} g_{\beta\nu} \dot{x}^{\beta} + \frac{m}{2} \sum_{\alpha} g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha} &= \frac{m}{2} \sum_{\alpha} g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha} + \frac{m}{2} \sum_{\alpha} g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha} \\ &= 2 \frac{m}{2} \sum_{\alpha} g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha} \\ &= m g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Falta agora calcularmos a derivada temporal $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\nu}} \right)$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\nu}} \right) &= m \frac{d}{dt} (g_{\alpha\nu} \dot{x}^{\alpha}) \\ &= m \frac{dg_{\alpha\nu}}{dt} \dot{x}^{\alpha} + m g_{\alpha\nu} \frac{d\dot{x}^{\alpha}}{dt} \\ &= m \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{dx^{\beta}}{dt} \dot{x}^{\alpha} + m g_{\alpha\nu} \ddot{x}^{\alpha} \\ &= m g_{\alpha\nu, \beta} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\alpha} + m g_{\alpha\nu} \ddot{x}^{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Substituindo estes resultados na equação de Lagrange do segundo tipo e dividindo tudo pela massa m temos

$$g_{\alpha\nu} \ddot{x}^{\alpha} + g_{\alpha\nu, \beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \nu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0 \quad (\text{A.38})$$

Podemos escrever o segundo termo do lado esquerdo da equação acima de forma mais simétrica

$$g_{\alpha\nu, \beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha}) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \quad (\text{A.39})$$

que substituído em (A.40) nos dá

$$g_{\alpha\nu} \ddot{x}^{\alpha} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0 \quad (\text{A.40})$$

Finalmente um último passo: vamos multiplicar toda a expressão acima por $g^{\mu\nu}$ e somar sobre a variável ν . Obtemos

$$\begin{aligned} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu}}_{\delta_{\alpha}^{\mu}} \ddot{x}^{\alpha} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} &= 0 \\ \ddot{x}^{\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0 \quad (\text{A.42})$$

onde fizemos a identificação

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}) \quad (\text{A.43})$$

Esta equação nada mais é que a equação obtida por Foster e Nightingale.

Embora a equação que defina os símbolos de Christoffel seja clara, o cálculo é, na maioria dos casos, extremamente trabalhoso. Em muitas situações práticas o que se faz é o processo inverso: calcular as equações de movimento e tirar os valores de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ diretamente destas equações. Vejamos um exemplo prático do movimento de uma partícula livre de massa m descrito em coordenadas esféricas. Neste caso a Lagrangeana vale

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \quad (\text{A.44})$$

Se aplicarmos as equações de Lagrange chegamos às equações do movimento:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Comparando as equações de movimento com a equação (A.42) obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Exemplo: retas no \mathbb{R}^2 em coordenadas polares.

O plano \mathbb{R}^2 pode ser descrito em termos das coordenadas polares r, ϕ com a métrica

$$g_{\mu\nu}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

pois, como sabemos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (\text{A.48})$$

Nos símbolos de Christoffel aparecem as derivadas da métrica na forma $g_{\mu\nu,\alpha}$. O único elemento de $g_{\mu\nu}$ que não é constante é o termo g_{22} que é uma função da variável $x^1 = r$ e portanto a única derivada diferente de zero é $g_{22,1}$. Isto significa que temos apenas três símbolos de Christoffel

diferentes de zero:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{22,1} = -r \\ \Gamma^1_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2} g^{22} g_{22,1} = \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Neste caso as equações das geodésicas são:

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 + \Gamma^1_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 \\ \dot{x}^2 + \Gamma^2_{12} \dot{x}^1 \dot{x}^2 &= \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

Esta é, se não a pior, uma das piores maneiras possíveis de se escrever a equação de uma reta em \mathbb{R}^2 ! Se aplicarmos o formalismo acima às coordenadas cartesianas $x^1 = x$ e $x^2 = y$ somos levados ao resultado trivial $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$.

Exemplo: geodésicas na superfície da esfera.

Podemos utilizar o mesmo procedimento para determinar a geodésica na superfície da esfera, ou seja, a equação de um grande círculo.

A superfície da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ pode ser parametrizada pelos ângulos $(x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$. O tensor métrico vale

$$g_{\mu\nu}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}\quad (\text{A.50})$$

e a única deriva parcial diferente de zero é $g_{22,1}$. Os símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{22,1} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^1_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2} g^{22} g_{22,1} = \cot \theta.\end{aligned}$$

As geodésicas são dadas pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 + \Gamma^1_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 &= \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \dot{x}^2 + \Gamma^2_{12} \dot{x}^1 \dot{x}^2 &= \ddot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0\end{aligned}\quad (\text{A.51})$$

Estas são as equações de um grande círculo na esfera. Como podemos ver isto? Primeiro temos que observar círculos na superfície da esfera são sempre a interseção de um plano com a superfície. Uma vez que a esfera é a figura mais simétrica possível, não há uma direção preferencial e todas as direções são equivalentes. Portanto podemos escolher uma curva para quem θ tem um valor constante (latitude constante, *i.e.* paralela ao plano equatorial. Neste caso $\dot{\theta} = 0$ e portanto o segundo termo da equação (A.51) acima deve ser identicamente nulo:

$$\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0\quad (\text{A.52})$$

Porém, $\dot{\varphi} = d\varphi/d\lambda \neq 0$ pois se $\dot{\varphi} = 0$ estaríamos presos a um ponto. Sendo assim concluímos que

$$\sin \theta \cos \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.53})$$

é a única solução possível para $\theta \in [0, \pi/2]$. Portanto a geodésica é um grande círculo e coincide com a linha do Equador. Se $\theta = \pi/2$ o 2º termo da segunda equação (A.51) nos dá

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = K \quad \rightarrow \quad \varphi = \lambda K \quad (\text{A.54})$$

Se medirmos φ em radianos, $K = 1/R$ e a solução nos dá longitude medida ao longo da linha do Equador. Agora, sendo a orientação dos eixos a partir dos quais definimos os ângulos θ e φ arbitrários, todos as possíveis “linhas equatoriais” são soluções e portanto os grandes círculos são todos os círculos desenhados sobre a superfície de uma esfera cujos centros coincidem com o centro da esfera, como havíamos afirmado anteriormente. Além do mais, é fácil ver também que para quaisquer 2 cidades na superfície da Terra sempre existe um grande círculo que passa pelas duas.

B

Coriolis na Relatividade Especial

A equação da geodésica permite que identifiquemos os termos proporcionais à $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ com as forças inerciais para referenciais acelerados. Vamos mostrar como uma partícula parada num referencial inercial tem uma aceleração diferente de zero quando vista de um referencial não inercial.

B.1 Propriedades de Transformação dos Símbolos de Christoffel

Nossa idéia é usar a equação

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0 \quad (\text{B.1})$$

de uma partícula em repouso num referencial inercial e mostrar que a mesma equação, quando escrita em termos das variáveis de um RNI, levam a uma aceleração diferente de zero, onde o termo proporcional à Γ corresponde à uma força inercial (fictícia). Para fazer isto basta calcular os símbolos de Christoffel, cuja definição é

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (\text{B.2})$$

e usar a métrica $g'_{\mu\nu}$ do referencial não inercial. Embora conheçamos a relação (B.5) entre as coordenadas (\mathbf{x}, t) e (\mathbf{x}', t') e portanto saibamos expressar $g'_{\mu\nu}$ a partir da métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, este cálculo pode ser bastante trabalhoso. Existe uma outra maneira de mostrar o surgimento de forças inerciais quando passamos de um RI para um RNI usando *as regras de transformação dos símbolos de Christoffel*. Esta alternativa faz sentido apenas quando estamos passando de um RI para um RNI pois neste caso a transformação dos símbolos de Christoffel é bastante simples. Isto pode ser entendido olhando para a regra geral de transformação de símbolos de Christoffel em diferentes sistemas de coordenadas:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\gamma}} \Gamma_{\rho\tau}^{\sigma} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}. \quad (\text{B.3})$$

No caso particular de um RI que admite uma sistema de coordenadas cartesianas, todos os $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ são iguais a zero e portanto a expressão acima se torna

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \quad (\text{B.4})$$

Com esta expressão podemos calcular diretamente os símbolos de Christoffel a partir das relações funcionais entre as coordenadas do RI e do RNI. Vamos usar aqui o exemplo do capítulo 1 onde, por questão de completeza, reproduzimos as relações entre as variáveis dos diferentes referenciais: x'^{ν} são as coordenadas associadas a um RNI que gira com velocidade angular ω constante entorno do eixo z do RI, de coordenadas x^{μ} . As coordenadas estão relacionadas via:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega t') - y' \sin(\omega t') & z &= z' \\ y &= x' \sin(\omega t') + y' \cos(\omega t') & t &= t' \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

O que devemos notar agora na expressão (B.4) é que aparece uma derivada segunda do tipo

$$\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}}. \quad (\text{B.6})$$

Como as transformações são **lineares** em $x' = x'^1$ e $y' = x'^2$, todas as derivadas do tipo $\partial^2/\partial x'^2$, $\partial^2/\partial y'^2$ e $\partial^2/\partial x' \partial y'$ são nulas. Portanto qualquer símbolo de Christoffel da forma

$$\Gamma_{x'x'}^{\alpha'}, \quad \Gamma_{y'y'}^{\alpha'}, \quad \Gamma_{x'y'}^{\alpha'} = \Gamma_{y'x'}^{\alpha'} \quad (\text{B.7})$$

são iguais a zero. Já a dependência em t' não é linear, e portanto os Γ diferentes de zero são da forma

$$\Gamma_{t't'}^{\alpha'}, \quad \Gamma_{t'x'}^{\alpha'} = \Gamma_{x't'}^{\alpha'}, \quad \Gamma_{t'y'}^{\alpha'} = \Gamma_{y't'}^{\alpha'} \quad (\text{B.8})$$

Não é difícil mostrar com um simples cálculo que os únicos símbolos de Christoffel que restam são:

$$\Gamma_{t't'}^{x'} = -\omega^2 x' \quad \Gamma_{t'y'}^{x'} = \Gamma_{y't'}^{x'} = -\omega \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{t't'}^{y'} = -\omega^2 y' \quad \Gamma_{t'x'}^{y'} = \Gamma_{x't'}^{y'} = \omega \quad (\text{B.10})$$

Olhando agora para a equação da geodésica ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'^1}{dt'^2} + 2\Gamma_{0'2'}^{1'} \frac{dx'^0}{dx'^0} \frac{dx'^2}{dx'^0} + \Gamma_{0'0'}^{1'} \frac{dx'^0}{dx'^0} \frac{dx'^0}{dx'^0} &= 0 \\ \frac{d^2 x'^2}{dt'^2} + 2\Gamma_{0'1'}^{2'} \frac{dx'^0}{dx'^0} \frac{dx'^1}{dx'^0} + \Gamma_{0'0'}^{2'} \frac{dx'^0}{dx'^0} \frac{dx'^0}{dx'^0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo os valores de Γ por nós calculados temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt'^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt'} - \omega^2 x' &= 0 \\ \frac{d^2 y'}{dt'^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt'} - \omega^2 y' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Nestas equações reconhecemos facilmente que um corpo no RI, quando visto de um referencial RNI, apresenta uma aceleração da forma

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (\text{B.13})$$

que nada mais é que a aceleração de Coriolis além de uma contribuição da forma

$$\mathbf{a}_{cfs} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (\text{B.14})$$

que representa uma aceleração centrífuga. Uma observação importante: esta é a aproximação não relativística (!) do movimento, motivo pelo qual qualquer obtivemos os resultados conhecidos da mecânica clássica. Para sermos mais rigorosos, a equação da geodésica deve ser escrita no tempo próprio τ , que é o tempo local do RNI, isto é:

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \frac{dx'^{\beta}}{d\tau} \frac{dx'^{\gamma}}{d\tau} = 0 \quad (\text{B.15})$$

A substituição $t' \approx \tau$ só se justifica no limite de $v \ll c$. Se levássemos em conta a Relatividade Especial as equações de movimento seriam

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t'}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x'}{d\tau^2} &= \omega^2 x' \left(\frac{dt'}{d\tau} \right) + 2\omega \frac{dy'}{d\tau} \frac{dt'}{d\tau} \\ \frac{d^2 y'}{d\tau^2} &= \omega^2 y' \left(\frac{dt'}{d\tau} \right) - 2\omega \frac{dx'}{d\tau} \frac{dt'}{d\tau} \\ \frac{d^2 z'}{d\tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

onde o tempo próprio τ é definido via

$$d\tau = \sqrt{g^{00}} dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2(x'^2 + y'^2)}{c^2}} dt'. \quad (\text{B.17})$$

C

Referenciais não inerciais na mecânica clássica e força de Coriolis

Para poder explicar os efeitos inerciais devido ao fato de nos encontrarmos num referencial não inercial, Newton introduziu a distinção entre forças “reais” e forças “fictícias”.

Imaginemos um corpo de massa m sobre o qual atua uma força \mathbf{F} num referencial inercial K . Em relação a um referencial não inercial K' que se move em relação à K com uma velocidade $\mathbf{v}(t)$ não constante no tempo, a variação de momentum da massa m vista por K' vale

$$\frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} - m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - m\mathbf{a} \quad (\text{C.1})$$

onde \mathbf{a} é a aceleração do sistema K quando medido por K' . É fácil entender este resultado pois se K' se move com aceleração \mathbf{a} em relação ao referencial privilegiado, então para K' é como se K se movesse com aceleração $-\mathbf{a}$. Para o referencial não inercial K' , além da força \mathbf{F} há também uma força inercial $-m\mathbf{a}$. Forças ditas reais surgem da interação entre corpos. Já as forças inerciais ou fictícias se devem exclusivamente à não inercialidade do referencial escolhido para descrever o movimento. Do ponto de vista da mecânica Newtoniana o referencial K' se move com uma aceleração em relação ao espaço absoluto. O espaço absoluto define o que é um movimento retilíneo, o tempo absoluto o que é um movimento uniforme ¹. Um ponto importante nestas considerações é o fato que a aceleração $-\mathbf{a}$ associada às forças inerciais é a mesma para todos os corpos, a exemplo da gravidade. Esta observação foi a chave para Einstein perceber que um referencial acelerado e um no qual atua uma força gravitacional são, ao menos localmente, equivalentes pois ambos têm a propriedade de imprimir a mesma aceleração à massas diferentes..

Vamos analisar um exemplo de sistema não inercial já conhecido e de fácil análise: um referencial que gira com velocidade angular ω constante. Este referencial será depois analisado do ponto de vista da

¹ G. Falk, W. Ruppel, *Mechanik, Relativität, Gravitation. Die Physik des Naturwissenschaftlers*, Springer Verlag, Heidelberg, 1973, p. 285.

TRE, mas antes vejamos como ele é tratado classicamente.

Referenciais girantes

Tomemos como exemplo um sistema K' que gira em torno de um eixo fixo no espaço com uma velocidade angular ω constante (figura ao lado).

Qualquer ponto fixo \mathbf{r} em K tem, em relação à K' , uma velocidade linear

$$\mathbf{V}' = -\omega \times \mathbf{r} \quad (\text{C.2})$$

Uma partícula que se encontra neste ponto e se translada com velocidade \mathbf{v} terá, do ponto de vista de K' , a velocidade \mathbf{v}' dada por

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}. \quad (\text{C.3})$$

Podemos escrever esta equação de maneira mais apropriada:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}' = \left(\frac{d}{dt} - \omega \times \right) \mathbf{r}. \quad (\text{C.4})$$

e portanto, para qualquer vetor cuja derivada temporal queiramos calcular, basta substituir o operador d/dt por $(d/dt - \omega \times)$. Isto nos permite calcular a aceleração da nossa partícula em relação à K'

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}' &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \right] \mathbf{r}' = \left(\frac{d}{dt} - \omega \times \right) \left(\frac{d}{dt} - \omega \times \right) \mathbf{r}' \\ &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - 2\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Em termos da aceleração \mathbf{a} e \mathbf{a}' podemos escrever esta expressão na forma

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\omega \times \mathbf{v} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \mathbf{a} - 2\omega \times \mathbf{v}' - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \quad (\text{C.6})$$

Este resultado nos mostra que do ponto de vista de K' surgem outras duas “acelerações”: a primeira é a aceleração *centrífuga*

$$\mathbf{a}'_{cf} = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = \omega^2 \mathbf{r}' - (\omega \cdot \mathbf{r}') \omega = \omega^2 \mathbf{r}'_{\perp} \quad (\text{C.7})$$

onde, na passagem da penúltima para a última equação usamos a identidade vetorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ e \mathbf{r}'_{\perp} representa a componente de \mathbf{r}' perpendicular ao vetor ω . A aceleração centrífuga depende da posição \mathbf{r}' do corpo em relação ao referencial K' . A segunda contribuição à aceleração é a famosa aceleração de Coriolis

$$\mathbf{a}'_{Cor} = -2\omega \times \mathbf{v}', \quad (\text{C.8})$$

que depende da velocidade do corpo medida por K' . Para baixas velocidades \mathbf{v}' a aceleração centrífuga domina. Para altas, a de Coriolis.

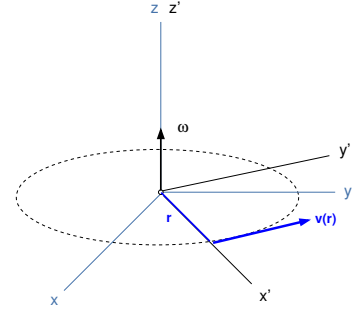


Figura C.1: Referencial não inercial (x', y', z') que gira com velocidade angular ω constante em torno do eixo z do referencial inercial (x, y, z) . As origens coincidem bem como os eixos z e z' .

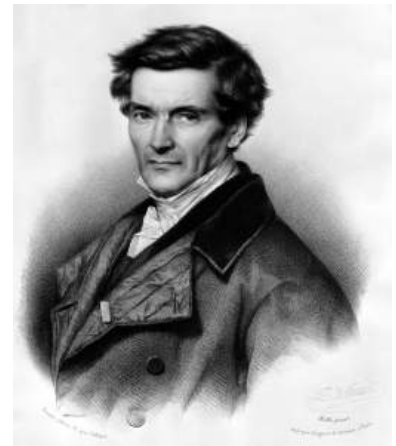


Figura C.2: Gaspard Gustave de Coriolis (1792 - 1843), matemático e engenheiro francês.

Tomemos um exemplo simples de dois corpos, sendo que o primeiro está em repouso em relação à K ($\mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{a}_1 = 0$) e o segundo está em repouso em relação à K' ($\mathbf{v}'_2 = 0$, $\mathbf{a}'_2 = 0$). Segundo os resultados acima, a velocidade e aceleração do corpo 1 são dadas por

$$\begin{aligned} \text{em relação à } K: & \quad \mathbf{v}_1 = 0 & \quad \mathbf{a}_1 = 0, \\ \text{em relação à } K': & \quad \mathbf{v}'_1 = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 & \quad \mathbf{a}'_1 = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}'_1. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Do mesmo modo, para o corpo 2 temos

$$\begin{aligned} \text{em relação à } K: & \quad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 & \quad \mathbf{a}_2 = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_2, \\ \text{em relação à } K': & \quad \mathbf{v}'_2 = 0 & \quad \mathbf{a}'_2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Embora estes dois conjuntos de equações sejam simétricas do ponto de vista matemático, sua interpretação segundo os cânones da mecânica newtoniana é diferente: sobre o corpo 1 não atua nenhuma força. Porém, do ponto de vista de K' , o corpo sofre a ação combinada de duas forças: uma força centrífuga dirigida para fora e uma força de Coriolis dirigida para dentro. Juntas elas geram, sob o ponto de vista de K' , uma aceleração que ele chama de centrípeta, pois todo corpo que executa um movimento de rotação num referencial deve estar sujeito, neste referencial, a uma força centrípeta. Estas forças são reais no sentido que seus efeitos são sentidos em K' mas elas são denominadas fictícias ou inerciais pelo fato que não são devidas à interação entre corpos. Sua existência se deve ao fato de K' não ser um RI. Sobre o corpo 2 atua uma força *centrípeta* verdadeira, de valor $-m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}$. Já do ponto de vista do referencial K' o corpo se encontra em repouso: isto só é possível pois para K' há uma força centrífuga (fictícia) que atua sobre a massa e que se contrapõe à força centrípeta.

Coriolis na superfície da Terra

Consideremos agora o efeito da força de Coriolis sobre a superfície do nosso planeta. Para tanto tomemos um corpo de massa m que se encontra a uma latitude ϕ medida em relação ao Equador e que gire junto com a Terra, cuja velocidade angular denotaremos por $\boldsymbol{\omega}$. Esta velocidade pode ser decomposta de maneira conveniente em uma componente perpendicular à superfície, por nós denotada ω_v e outra componente paralela à superfície, que chamaremos de ω_h . Para uma dada latitude ϕ estas velocidades valem $\omega_v = \omega \sin \phi$ e $\omega_h = \omega \cos \phi$, conforme ilustra a figura ao lado. Um corpo de massa m em uma latitude dada pelo ângulo ϕ sente a ação de uma força centrífuga de valor $m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \phi$.

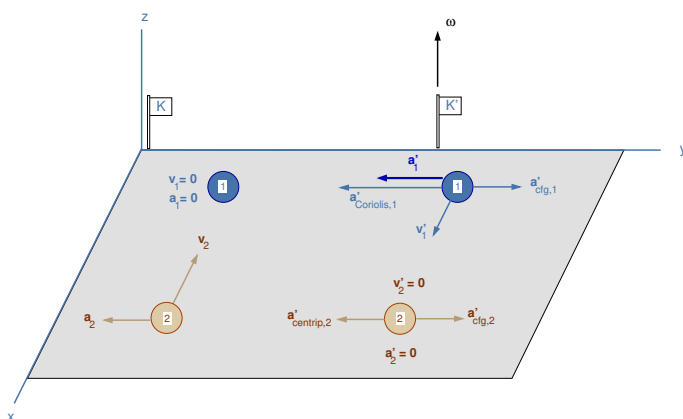


Figura C.3: Duas partículas vistas por dois referenciais, sendo um inercial (K) e outro não inercial (K') que gira com velocidade angular ω constante. A partícula 1 está em repouso em K ; neste referencial ele tem $v_1 = 0$, $a_1 = 0$. No referencial K' , o corpo 1 tem uma velocidade $v'_1 = -\omega \times \mathbf{r}'_1$. Sobre este corpo atuam a força centrífuga $\mathbf{a}'_{cf,g,1} = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}'_1)$ e a força de Coriolis $\mathbf{a}'_{Coriolis,1} = -2(\omega \times \mathbf{v}'_1) = -2\mathbf{a}'_{cf,g,1}$. Disto resulta $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}'_{cf,g,1} + \mathbf{a}'_{Coriolis,1} = -\mathbf{a}'_{cf,g,1}$. O corpo 2 gira com velocidade angular ω em relação à K . Neste referencial ele tem uma velocidade linear $\mathbf{v}_2 = \omega \times \mathbf{r}_2$ e uma aceleração centrípeta $\mathbf{a}_2 = -\omega^2 \mathbf{r}_2$. Para K' o corpo se encontra sob a ação de uma aceleração centrífuga $\mathbf{a}'_{cf,g,2} = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}'_2)$ e uma força centrípeta igual, de modo que as duas se cancelam e para ele o corpo se encontra em repouso.

No hemisfério norte a força centrífuga faz um ângulo ϕ com a vertical local e aponta na direção sul. No hemisfério sul, ela aponta na direção norte. A componente vertical desta força é contrária à força da gravidade. A componente horizontal da força é tangencial à superfície, na direção dos meridianos.

A força de Coriolis depende da velocidade do corpo em questão. Por uma questão de conveniência podemos decompor esta velocidade \mathbf{v}' numa componente horizontal (paralela à superfície) e numa vertical

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_h + \mathbf{v}'_v. \quad (\text{C.11})$$

Podemos escrever a força de Coriolis na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{Cor} &= -2m(\boldsymbol{\omega}_h + \boldsymbol{\omega}_v) \times (\mathbf{v}'_h + \mathbf{v}'_v) \\ &= -2m\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{v}'_h - 2m\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{v}'_v - 2m\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{v}'_h. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

A componente vertical \mathbf{v}'_v da velocidade contribui à força de Coriolis com o termo $-2m\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{v}'_v$ que atua no plano tangente ao ponto onde se encontra a partícula. Se ela se move para cima, a força é dirigida para o Oeste, ao passo que se ela se move para baixo, a força a impele para Leste. Portanto um corpo que cai livremente de uma altura considerável deslocar-se-á para o Leste da linha que une o ponto ao centro da Terra. Esta força de deflexão tem um módulo $2m\omega \cos \phi v_v$ e portanto a deflexão será maior no Equador e nula nos Pólos.

Já a componente horizontal \mathbf{v}'_h contribui com dois termos: a componente $-2m\boldsymbol{\omega}_h \times \mathbf{v}'_h$ aponta na direção vertical, pois os vetores que $\boldsymbol{\omega}_h$ e \mathbf{v}'_h determinam um plano tangente ao ponto onde atuam. Esta força impulsiona o corpo em direção ao centro da Terra ou tenta arrancá-lo da superfície. Esta força é relevante na trajetória de corpos balísticos de longo alcance. A outra componente associada à \mathbf{v}'_h é o termo $-2m\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{v}'_h$. Esta força é sempre perpendicular à velocidade e também atua na horizontal. Se olharmos na direção de \mathbf{v}'_h esta componente sempre atua para a direita caso o corpo esteja no hemisfério norte e para a esquerda no hemisfério sul. A Força de Coriolis é responsável não apenas pelo sentido (horário ou anti-horário) dos ciclones e furacões como também pelo maior desgastes dos trilhos de um lado da linha férrea quando o trecho é percorrido em apenas uma direção.

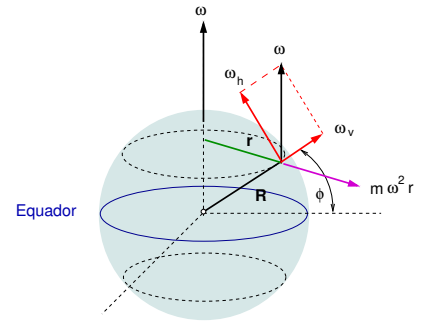


Figura C.4: A Terra enquanto referencial não inercial. Para um dado ponto da superfície de latitude ϕ com velocidade de rotação $\boldsymbol{\omega}$ surge sobre a massa m a aceleração centrífuga $m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \phi$ devido à não inercialidade do referencial.

D

Física em espaços curvos.

Embora sempre pensemos na Teoria da Relatividade Geral apenas como uma teoria da gravitação, ela é mais do que isso: ela é a teoria que descreve a Física como um todo em espaços curvos, isto é a Física de processos não gravitativos. Para isto é necessário entendermos como *traduzir* as leis da Física como as conhecemos para leis covariantes. Isto é feito basicamente usando uma regra de transformação em que substituímos as derivadas usuais por derivadas covariantes, que nada mais é que a formulação matemática do Princípio da Equivalência Forte.

D.1 A derivada covariante e a regra de transformação

Uma vez que vamos usar repetidamente a derivada covariante, reproduzimos aqui a fórmula da derivada covariante de um vetor \mathbf{A} ao longo de uma curva $x^i(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\frac{DA^i}{d\lambda} &= \frac{dA^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kp} A^k \frac{dx^p}{d\lambda} && \text{(contravariante)} \\ \frac{DA_i}{d\lambda} &= \frac{dA_i}{d\lambda} - \Gamma^p_{ik} A_p \frac{dx^p}{d\lambda} && \text{(covariante)}\end{aligned}\tag{D.1}$$

Aqui vamos partir do pressuposto que a métrica $g_{\mu\nu}$ é conhecida. A regra para transformar leis da Relatividade Especial em leis da Relatividade Geral pode ser formulada da seguinte maneira:

Regra de transição: dada uma lei da Relatividade Restrita (de métrica Minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$) para um quadritensor, obtemos a versão da mesma lei na Relatividade Geral substituindo as derivadas usuais por derivadas covariantes e a métrica $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica $g_{\mu\nu}$.

Esta 'receita' pode ser aplicada de duas maneiras diferentes: no caso de espaços pseudo-Euclidianos, a regra nos permite escrever leis de forma covariante e portanto independentes das coordenadas escolhidas. Um exemplo típico é quando passamos de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas. No caso de espaços realmente curvos, o que

obtemos são novas leis que descrevem fenômenos físicos não gravíticos na presença de gravidade, codificada no tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Um ponto importante muito importante é que esta regra, embora necessária, não é suficiente no sentido que se tivermos por exemplo derivadas parciais cruzadas de 2ª ordem, do tipo

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^p \partial x^k} = A_{i,p,k} \quad (\text{D.2})$$

não podemos simplesmente substituir a expressão acima por $A_{i;p;k}$ pois em se tratando de derivadas covariantes, a ordem das derivadas importa pois elas não comutam. Isto é semelhante ao cuidado que devemos ter quando passamos da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica onde operadores não comutam. Para cada caso devemos comparar a equação obtida via regra de transição com os resultados experimentais, que são o critério da correção da lei específica. Vamos olhar agora alguns exemplos da aplicação da regra de transição

D.2 Mecânica do ponto

A 2ª lei de Newton na Relatividade Especial é

$$m_0 \frac{du^i}{d\tau} = F^i \quad (\text{D.3})$$

onde m_0 é a massa de repouso e τ o tempo próprio $d\tau^2 = ds^2/c^2$. u^i são as componentes da quadrivelocidade, isto é $u^i = dx^i/d\tau$. A passagem para a Relatividade Geral é

$$m_0 \frac{Du^i}{d\tau} = F^i \quad (\text{D.4})$$

onde a definição da quadrivelocidade permanece inalterada mas devemos ter o cuidado de usar, na definição do tempo-próprio τ , a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço curvo

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{D.5})$$

No caso da partícula livre a equação se reduz simplesmente à

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0 \quad (\text{D.6})$$

Esta equação tem uma interpretação interessante, já discutida anteriormente: ela define a equação do transporte paralelo, ou seja, o vetor u^i é transportado ao longo da curva $x^i(\tau)$ sem sofrer mudanças seja em módulo, seja em direção. O vetor u^i por outro lado é tangente à linha de mundo da partícula e o paralelismo do vetor consigo mesmo implica que a trajetória é a curva 'mais reta' possível entre dois pontos,

ou seja, o caminho mais curto. Esta nada mais é a que a *curva geodésica* por nós definida anteriormente (chamada por Einstein de *geodeta*). Esta equação acima nada mais é que a definição por nós já conhecida:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{mn} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} = 0 \quad (\text{D.7})$$

D.3 Eletrodinâmica

As equações da Eletrodinâmica por nós vistas no curso de Relatividade Restrita são

$$F^i_j{}^{,k} + F^{ki}{}_{,j} + F^{jk}{}_{,i} = 0 \quad (\text{D.8})$$

e

$$F^m_n{}_{;m} = \mu_0 J^m. \quad (\text{D.9})$$

O primeiro conjunto de equações nos dão as 3 componentes da lei de indução de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ e a lei de Gauss para o campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. O conjunto de baixo nos dão as leis não homogêneas, a lei de Gauss para o campo elétrico e a lei de Ampère na presença de corrente. Para obter a versão da Teoria da Relatividade Geral substituímos as equações acima por

$$F^i_j{}_{;k} + F^{ki}{}_{;j} + F^{jk}{}_{;i} = 0 \quad (\text{D.10})$$

e também

$$F^m_n{}_{;m} = \mu_0 J^m. \quad (\text{D.11})$$

A equação da continuidade (conservação de carga) vale

$$J^m{}_{;m} = \text{div} \mathbf{J} = 0. \quad (\text{D.12})$$

Porém, lembrando das definições da derivada covariante

$$F^i_j{}_{;k} = F^i_j{}_{,k} + \Gamma^i_{lk} F^{lj} + \Gamma^j_{lk} F^{il}, \quad (\text{D.13})$$

ao substituímos estes valores em (D.10) com os respectivos índices, os termos proporcionais à Γ cancelam-se mutuamente e ficamos com

$$F^i_j{}_{,k} + F^{ki}{}_{,j} + F^{jk}{}_{,i} = 0. \quad (\text{D.14})$$

Portanto, a equação é a mesma por nós usada em espaços de Minkowski. Isto pode ser entendido também pelo fato do tensor das tensões de Maxwell manter sua forma pois se chamarmos o quadripotencial de A^i , temos

$$F^{ij} = A_{i;j} - A_{j;i} = A_{i,j} - A_{j,i} \quad (\text{D.15})$$

pela simetria dos símbolos de Christoffel. Um outro ponto importante é a densidade de força de Lorentz,

$$f^m = F^{mn} J_n \quad (\text{D.16})$$

que pode também ser obtida através da divergência covariante do tensor energia-momento eletromagnético

$$f^m = -T^{mn}_{;n} \quad (\text{D.17})$$

onde

$$T^{mn} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{ml} F_l^n - \frac{1}{4} g^{mn} F_{ik} F^{ik} \right). \quad (\text{D.18})$$

E

A palestra de Einstein em Kyoto

*Apinhadas as pessoas, afiados os ouvidos,
Todos sentados, sentindo-se perdidos,
As mentes concentradas, extasiado o olhar,
Entregues a um destino a lhes pesar.
EINSTEIN diante do quadro,
Pregando o sermão, apressado,
E ISHIWARA, detalhista e rapidinho
Escreve tudo em seu livrinho ¹*

(A. Einstein)

O resultado das expedições de 1919 para comprovar a previsão feita pela TRG de Einstein acerca do desvio da luz pelo Sol despertou enorme interesse pelo seu trabalho mundo afora. Entre 1921 e 1932 Einstein viajou extensivamente proferindo palestras. Uma destas viagens o trouxe em 1925 à América Latina e ao Brasil. Alguns anos antes, em uma viagem que merece especial destaque, Einstein visitou a Universidade de Kyoto a convite do físico Y. Nishida. Nesta visita Einstein proferiu em Dezembro de 1922 uma palestra acerca do caminho por ele percorrido até chegar à Teoria da Relatividade. Durante sua *tournee* pelo Japão, Einstein foi acompanhado pelo físico Jun Ishiwara, fluente em alemão e que conhecia Einstein pessoalmente desde 1912. Ishiwara publicou artigos em Teoria da Relatividade, além de importantes trabalhos sobre mecânica quântica.

Durante a palestra em Kyoto, Ishiwara tentou preservar as palavras de Einstein anotando-as detalhadamente, como podemos depreender das palavras de Einstein transcritas acima. Em 1923 Ishiwara publicou a transcrição de suas notas em japonês ². O curioso é que este texto, embora dos mais importantes para todos aqueles interessados na história da Teoria da Relatividade, não foi preservado no alemão original, língua na qual Einstein proferiu sua palestra. Em 1979 foi organizada em Berlim uma grande conferência para comemorar o centenário do nascimento de Albert Einstein ³, na qual foi aventada a hipótese de se

¹ “Gedrängt das Volk, gespitzt die Ohren,
Sie sitzen alle, wie verloren,
In Sinnen tief, verzückt der Blick,
Ergeben in ein hart’ Geschick.
Der EINSTEIN an der Tafel steht,
Die Predigt rasch vom Stapel geht,
Und ISHIWARA, flink und fein,
Schreibt alles in sein Büchlein ein”.
(Tradução SRD)

² J. Ishiwara, *Ainsutain-Kyôzyu Kôen Roku*, Kaizo-sha, Tokyo, 1923.

³ *Einstein Centenarium*, H. J. Treder Hsg., Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

tentar traduzir o texto de volta para o alemão, uma vez que as anotações originais de Ishiwara se perderam e ninguém sabia exatamente as exatas palavras de Einstein. O astrofísico alemão Hans Joachim Haubold e o linguista japonês Eiichi Yasui, combinando conhecimentos de ambas as áreas – física e filologia – decidiram então reconstruir a partir do texto de Ishiwara o possível texto de partida em alemão. O texto de Haubold e Yasui veio finalmente à luz em 1981, por ocasião da celebração do centenário da primeira medida de Michelson para a determinação da existência do éter, evento este realizado em Potsdam, onde Michelson realizara seu experimento. Em seu trabalho, Haubold e Yasui não cotejaram o texto japonês com as traduções existentes em inglês (T. Ogawa em 1979, A. Okawa em 1982 e Y. A. Ono em 1983) para não se deixarem influenciar por estes ⁴

A tradução que aqui apresento é feita a partir do texto em alemão de Haubold e Yasui, baseado na reedição de 1971 do texto de Ishiwara ⁵. É claro que a tradução de um texto em alemão reconstruído a partir de uma versão japonesa do texto alemão original pode deixar muito a desejar. No entanto, acredito que a tarefa seja justificada pelo trabalho meticuloso que Haubold e Yasui tiveram para reconstruir o texto original usando termos e expressões do alemão da época e num estilo mais próximo possível do de Einstein. O texto que aqui apresento se desvia do texto alemão apenas em um ponto: este último é formado de frases bastante curtas e para a leitura não ficar muito truncada, procurei dar ao texto uma aparência mais “natural” possível. Frases curtas são incomuns em textos em língua alemã mas no caso de Einstein isto provavelmente pode ter sido uma opção pois sua palestra – voltada para estudantes – era traduzida simultaneamente e neste caso as frases precisavam ser curtas para que o tradutor pudesse vertê-las mais fidedignamente para o japonês.

Antes de apresentar a tradução, gostaria aqui de expressar meu agradecimento ao Prof. H. J. Haubold por gentilmente responder algumas perguntas sobre o texto traduzido por ele e pelo Prof. Yasui, bem como pela contextualização da sua origem. Também gostaria de agradecer a Lucas Kenji Moori pela ajuda com o título em japonês.

⁴ T. Ogawa, ‘Japanese Evidence for Einstein’s Knowledge of the Michelson-Morley Experiment’, *Japanese Studies in the History of Sciences* 18 (1979), p. 73; Y.A. Ono: ‘Einstein’s Speech at the Kyoto University, December 14, 1922’, *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (Leipzig)* 120, 25.

⁵ H.J. Haubold, E. Yasui: ‘Jun Ishiwaras Text über Albert Einsteins Gastvortrag an der Universität von Kyoto am 14. Dezember 1922 (O texto de Jun Ishiwara sobre a palestra convidada de Albert Einstein na Universidade de Kyoto em 14 de dezembro de 1922)’, *Archive for the History of the Exact Sciences*, 36, 3 (1986), 271-279.

アインシュタイン 教授講演録
 (Ainsutain-Kyôzyu Kôen Roku)
 Transcrição da Palestra do Professor Einstein

Não é nem um pouco fácil dizer como cheguei à Teoria da Relatividade, pois há um número incontável de coisas que excitam nossa imaginação, de uma maneira complexa, coisas estas envoltas em sombras, imperscrutíveis. Prefiro também evitar discutir uma a uma detalhadamente, pois que cada uma nos influencia de um modo diferente. Da mesma maneira não enumerarei meus trabalhos, mas tentarei apenas descrever sucintamente os pontos principais que estão mais diretamente ligados ao desenvolvimento da ideia.

Foi mais ou menos há 17 anos que me veio a ideia de estabelecer Princípios da Relatividade. De onde ela veio eu não saberia precisar exatamente. Uma coisa porém é certa: no problema da óptica de corpos em movimento esta questão já se fazia presente. A luz se propagava no Éter, e a Terra por sua vez se movia por ele. Do ponto de vista da Terra, é o Éter que se movia. Porém, na literatura especializada em Física não pude encontrar uma prova sequer que mostrasse que esta corrente do Éter realmente existia.

Eu queria assim, de alguma maneira, demonstrar [a existência] do fluxo do Éter pela Terra, quer dizer demonstrar o movimento da Terra pelo Éter. Quando me propus a resolver esta tarefa, eu não duvidava nem da existência do Éter nem do movimento da Terra através dele. Se um raio de luz, emitido por uma fonte e refletido por espelhos de tal maneira colocados que parte [do feixe] se move na mesma direção da Terra e outra parte na direção contrária, então entre estas duas partes deve haver uma diferença de energia, diferença esta que pode ser medida pela diferente quantidade de calor registrada com a ajuda de dois termopares. A ideia de fundo era a mesma do experimento de Michelson, que na época eu não conhecia suficientemente bem. Esta ideia me acompanhou durante meus estudos sobre o tema e, assim que soube dos resultados interessantes dos experimentos de Michelson, reconheci intuitivamente – caso Michelson não tivesse cometido nenhum erro durante suas medidas – que talvez a ideia de um movimento da Terra pelo Éter poderia estar errada. Este foi o primeiro passo que me levou àquilo que hoje chamamos de Princípio da Relatividade Especial. Desde então sou da opinião que a Terra gira em torno do Sol mas que este movimento não pode ser detectado por meio de qualquer experimento baseado no uso da luz.

Tive então a oportunidade de ler do tratado de Lorentz de 1895⁶ no qual problemas eletrodinâmicos são discutidos e completamente resolvidos em primeira ordem [de aproximação], isto é desprezando-se os termos quadráticos da razão entre a velocidade do corpo em

⁶ H. A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern (Tentativa de uma teoria para os efeitos elétricos e ópticos de corpos em movimento)*, E.J. Brill, Leiden, 1895.

movimento e a velocidade da luz.

Além disto estudei o experimento de Fizeau e quis discutí-lo segundo a hipótese de que a equação do elétron posta por Lorentz continuava válida quando colocamos nosso referencial sobre a partícula que se move e não no vácuo. De qualquer modo eu acreditava na correteza das equações eletrodinâmicas de Maxwell-Lorentz, isto é que elas reproduziam os fatos de maneira exata. Porém se estas equações continuam válidas num referencial em movimento somos forçosamente obrigados a concluir que a velocidade da luz é uma constante. Esta constância porém bate de frente com o teorema da adição de velocidades que conhecemos da Mecânica.

Por qual motivo estas duas coisas contradiziam uma a outra? Percebi que aqui havia um questão difícil de ser resolvida. Fiquei quase um ano todo pensando nas mais diferentes possibilidades, na esperança de que as ideias de Lorentz tivessem que ser de algum modo modificadas, mas sem sucesso. Tive que admitir que uma solução deste enigma não era assim tão simples.

Um de meus amigos, que trabalhava em Berna (Suíça) acabou me ajudando acidentalmente ⁷. Um dia fui visitá-lo e disse: “faz uns dias que tenho brigado com um problema sem conseguir sair do lugar. Por isso queria discutí-lo contigo hoje”. Durante nossa discussão me veio repentinamente uma ideia. No dia seguinte eu o visitei novamente e o surpreendi dizendo: “Obrigado, consegui resolver o problema”. Minha solução dizia respeito ao conceito de tempo. O tempo não pode ser definido de maneira absoluta: entre o tempo e a velocidade do sinal existe uma relação inseparável. Era isso. As dificuldades surgidas até então podiam ser resolvidas de maneira completa e definitiva.

Cinco semanas depois desta ideia a Teoria da Relatividade Especial como hoje a conhecemos estava pronta. Eu também não alimentava quaisquer dúvidas que do ponto de vista filosófico ela também estava correta. Ela é totalmente condizente com a teoria de Mach. Alguns problemas, que foram depois resolvidos dentro do contexto da Teoria da Relatividade Geral, não tinham ligação direta com esta doutrina, na qual ele analisara e explicara muitos conceitos fundamentais da ciência. Alguns destes porém podiam ser vistos como estando indiretamente ligados à Teoria da Relatividade ⁸.

Nascia aí a Teoria da Relatividade.

O conjunto de ideias que levou à Teoria da Relatividade Geral surgiu dois anos depois, em 1907 e de maneira curiosa: a relatividade do movimento era restrita aos movimentos cujas velocidades relativas permaneciam constantes, não podendo ser aplicada a movimentos arbitrários, e isto era algo que me desagradava. Pensava constantemente numa maneira de eliminar esta restrição quando então, em 1907, fui incumbido por Stark a escrever um artigo que contivesse as consequências

⁷ O amigo ao qual Einstein se refere é Michele Angelo Besso (1873-1955), engenheiro suíço de origem italiana. Trabalhou com Einstein no Escritório de Patentes em Berna entre 1904 e 1909.

⁸ A Teoria de Mach, epitomizada no chamado Princípio de Mach ou Conjectura de Mach e a qual Einstein constantemente se refere diz respeito basicamente à ideia de que a inércia de qualquer corpo é fruto da interação deste corpo com todas as outras massas do Universo. Esta ideia é apresentada por Mach em seu famoso livro sobre a história da Mecânica, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung – historisch kritisch dargestellt* (A Mecânica em seu desenvolvimento: uma abordagem crítico-histórica), Xenomoi Verlag, Berlin, 2012.

da Relatividade Especial para ser publicado no *“Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik”* na qual ele era editor ⁹. Enquanto trabalhava no artigo, percebi que todas as leis da Natureza podem ser tratadas sob o ponto de vista da Relatividade Especial, menos a gravitação. Descobrir a razão disto se tornou um dos meus mais profundos desejos, que no entanto demorou muito até que eu pudesse satisfazê-lo.

O que mais me incomodava era o fato que embora a relação entre energia e inércia possa ser explicada de maneira brilhante pela Relatividade Especial ¹⁰, a relação entre inércia e peso ¹¹, ou seja com a energia no campo gravitacional, continuava no escuro. Eu suspeitava que a solução deste problema não poderia ser obtida com a Relatividade Especial.

Estava eu sentado na minha poltrona no Escritório de Patentes de Berna quando, repentinamente, me veio a seguinte ideia: quando uma pessoa está em queda livre, ele não sente o próprio peso. Fiquei pasmo. Esta ideia simples me deixou profundamente impressionado e me colocou na direção correta de uma teoria da gravitação ... que todo fenômeno natural, com exceção da Lei da Gravidade, poderia ser representado pelos conceitos da teoria da relatividade especial. Senti uma vontade profunda de entender o porquê. Para um observador que cai do telhado de uma casa não existe – ao menos em suas imediações – um campo gravitacional. Quando neste caso o observador deixa que outros objetos caiam com ele, então em relação a ele estes objetos se encontram em repouso ou em movimento uniforme. Deste modo, a comprovação experimental da independência da aceleração da gravidade é um forte argumento para o fato que o postulado da Relatividade pode também ser estendido para sistemas de coordenadas que não se movam uniformemente um em relação ao outro.

Decidi então que a Teoria da Relatividade não deveria ficar estrita à sistemas que se movam com velocidade constante mas deveria ser estendida de modo geral para sistemas acelerados e, fazendo isto, resolver também o problema da gravitação. Afinal, pode-se interpretar a ausência de peso de uma pessoa em queda livre como havendo naquele ponto, junto ao campo gravitacional da Terra, um outro campo gravitacional que compense o primeiro. Isto é, num sistema acelerado é como se houvesse um novo campo gravitacional.

Não foi possível no entanto resolver de imediato todos os problemas de maneira completa. Foram necessários ainda oito anos até que eu descobrisse as equações corretas, embora algumas ideias básicas gerais que implicavam nestas relações eu já havia entendido antes.

Mach foi quem afirmou que todos os sistemas sujeitos a uma aceleração são equivalentes entre si, algo que contradiz totalmente nossa Geometria. Isto porque se todos os sistemas deste tipo pudessem ser considerados equivalentes, a Geometria Euclideana deixaria de valer

⁹ Johannes Stark (1874 - 1957), prêmio Nobel de Física em 1919, ficou também famoso por ser, junto com Philipp Lenard (1862 - 1947), um dos mais ardentes defensores da ideia nazista de uma *“Deutsche Physik”*, isto é uma “física alemã”. Entre seus principais alvos estavam Einstein e Heisenberg, embora este último não fosse judeu. Por uma ironia da história, foi o convite de Stark para Einstein que colocou este último no caminho da Teoria da Relatividade Geral, como fica claro por esta passagem. O *Anuário da Radioatividade e Eletrônica* era um dos principais periódicos de física da época e no qual Einstein publicou importantes trabalhos. O termo *eletrônica* deve ser entendido aqui não na sua acepção moderna mas no sentido de *teoria do elétron*.

¹⁰ Einstein se refere aqui à famosa relação $E = mc^2$ entre a massa inercial e energia de um corpo.

¹¹ Isto é, massa inercial e massa gravitacional.

em cada um deles. Estabelecer leis abrindo mão da Geometria seria o mesmo que tentar expressar um pensamento sem usar palavras. É preciso primeiro encontrar as palavras, com a ajuda das quais nossos pensamentos possam ser verbalizados. O que devemos então procurar aqui? Pesquisar o que exatamente?

Eu não logrei uma resposta até 1912 quando então me veio a ideia que a teoria de superfícies de Gauss seria talvez a chave para este segredo. As coordenadas gaussianas para uma superfície me pareceriam fazer sentido. Até este momento eu não sabia nada do profundo tratado de Riemann acerca dos fundamentos da Geometria¹². Eu me lembrava da teoria de Gauss, que vimos durante meu tempo de estudante no curso de Geometria ministrado pelo Professor Geiser¹³. Deste modo me veio esta ideia, na qual passei a pensar mais aprofundamente: que os fundamentos da Geometria deveriam ter algum sentido na Física.

Ao voltar de Praga para Zurique, encontrei lá meu melhor amigo, Grossmann, que se sentia em casa com a matemática¹⁴. Quando eu ainda trabalhava no Escritório de Patentes em Berna ele havia me ajudado com a literatura matemática associada a alguns problemas nos quais eu trabalhava. Foi através dele que soube, pela primeira vez, sobre Ricci¹⁵ e depois Riemann. Perguntei a meu amigo se teria como resolver o problema que tinha na cabeça usando a teoria de Riemann, ou seja se os coeficientes que eu procurava poderiam ser encontrados de maneira unívoca pela invariância do elemento de curva. O resultado foi um trabalho publicado em 1913 em parceria com Grossmann¹⁶. No entanto não tínhamos conseguido ainda chegar numa equação para a gravitação. Continuei meus estudos das equações de Riemann que me mostraram cada vez mais razões para ver que por este caminho não conseguiria chegar aos resultados esperados.

A isto se seguiram dois anos de árduo trabalho. Foi só depois disto que percebi que havia um erro nos meus cálculos iniciais. Voltei-me novamente à teoria dos invariantes para conseguir assim uma equação correta da gravitação que ganhou forma duas semanas depois.

Dos trabalhos produzidos depois de 1915, menciono aqui apenas o trabalho sobre cosmologia¹⁷. Trata-se de um trabalho sobre a cronometria e geometria do Universo. Na base deste trabalho se encontram um tratamento das condições de contorno da Teoria da Relatividade Geral e as considerações de Mach acerca da inércia. Eu não sabia na verdade de maneira concreta o quanto Mach sabia do caráter relativístico da inércia. É um fato porém que a influência intelectual por ele exercida sobre mim, foi de uma magnitude decisiva.

As condições de contorno das equações da gravitação deviam se manter invariantes. Para isto imaginei o mundo como um espaço fechado, eliminando assim as fronteiras, o que permitiu eu desse uma solução ao problema cosmológico. Como resultado, a inércia mostra ser apenas

¹² Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), matemático alemão, foi professor nas Universidades de Göttingen e Berlin. Foi aluno de Carl Friedrich Gauss (1788 - 1855).

¹³ Carl Friedrich Geiser (1843 - 1934), matemático suíço especializado em geometria algébrica. Einstein estudou física entre 1896 e 1900 no Instituto de Pedagogia do Politécnico de Zurique, a famosa ETH, instituto este responsável pela formação de professores de Física e Matemática. Foi durante este período que conheceu Marcel Grossmann (1878 - 1936) que o ajudaria posteriormente com o cálculo tensorial no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral.

¹⁴ Einstein foi professor na Universidade de Praga entre 1911 e 1912, retornando depois como professor da ETH em Zurique.

¹⁵ Gregorio Ricci-Curbastro (1853 - 1925), matemático italiano que junto com seu aluno Tullio Levi-Civita (1873 - 1942) é considerado o criador do cálculo tensorial.

¹⁶ A. Einstein, M. Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation (Esboço de uma Teoria da Relatividade Generalizada e de uma Teoria da Gravitação)*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62 (1913), 225 - 261.

¹⁷ O trabalho ao qual Einstein aqui se refere é o *Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie (Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade Geral)*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin VI* (1917), 142. Neste trabalho ele inclui sua famosa constante cosmológica, por ele chamado de *termo* – λ (λ – *Glied*), com o objetivo de obter uma solução que representasse um universo estático e ainda obedecesse ao Princípio de Mach.

uma propriedade [da interação] entre corpos, de tal modo que a inércia de um corpo deve desaparecer quando nenhuma matéria disposta relativa e ele esteja presente. Com esta conclusão acredito também que a Teoria da Relatividade Geral consiga ser epistemologicamente completa.

Nesta curta retrospectiva histórica tentei mostrar-lhes a origem dos pontos fundamentais da Teoria da Relatividade.

F

A precessão do periélio

Segundo a teoria da gravitação de Newton, as órbitas dos planetas são elipses de excentricidade ϵ . Uma perturbação do potencial Newtoniano $\sim 1/r$ leva a uma precessão do eixo principal da elipse, a conhecida precessão do periélio. Esta perturbação tem duas origens principais: a atração gravitacional sobre um planeta devido aos outros planetas do sistema e o efeito relativístico da curvatura do espaço. Calculamos aqui, por outro método, a precessão do periélio como função da excentricidade da órbita.

F.1 A precessão

Há vários fatores que contribuem para o fato que a órbita de planetas não sejam elipses fechadas sobre si próprias. Todas estas podem ser encaradas como perturbações (correções) ao potencial gravitacional Newtoniano

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \quad (\text{F.1})$$

na forma de termos de ordem $r^{-\alpha}$ onde o expoente $\alpha > 1$. Os efeitos principais – em termos de contribuição numérica para a precessão – são aqueles devido à atração gravitacional de outros planetas e a métrica de Schwarzschild. Dentre todos os planetas, Mercúrio é aquele para o qual estes efeitos são os mais pronunciados pelo fato que ele está sujeito, por um lado, a uma atração de todos os planetas de massa maior que a sua e por outro pelo fato de estar mais próximo do Sol, e portanto onde a curvatura do espaço-tempo é maior. O efeito clássico já era conhecido e calculado desde o século XIX e corresponde a uma precessão de 532 arcosegundos por século. O efeito relativístico é de 43 arcosegundos por século ou 0.104 arcosegundos por ano mercuriano (período orbital de 88 dias). Isto explica também o fato de termos os melhores dados experimentais que confirmam a precessão relativística justamente para este planeta, pois ao longo de um ano terrestre podemos observar aproximadamente 4 órbitas completas de Mercúrio.

Consideremos a figura abaixo: ela mostra esquematicamente o planeta Mercúrio em sua órbita ao redor do Sol (notem que a elipse é exageradamente excêntrica para efeitos de visualização apenas, pois na realidade a órbita de Mercúrio é muito próxima de um círculo, com excentricidade $\epsilon = 0.206$). O ponto mais próxima do Sol, um dos focos da elipse, corresponde à distância mínima r_{min} , também chamado de periélio. O ponto mais distante r_{max} corresponde ao afélio. Podemos tomar o ponto de origem $\phi = 0$ aquele para o qual $r(\phi = 0) = r_{min}$, conforme a figura.

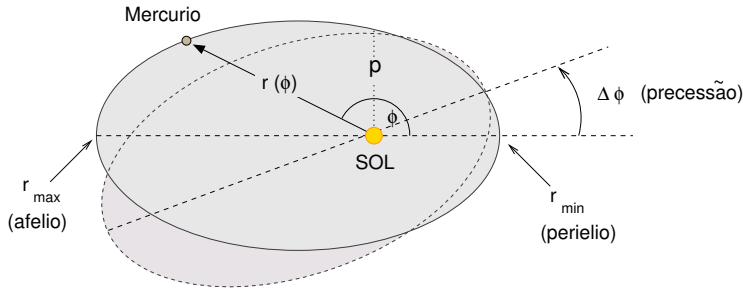


Figura F.1: Na física de Newton a órbita de planetas são elipses. A métrica de Schwarzschild introduz um termo que dá origem a uma precessão $\Delta\phi$ da órbita. A elipse acima é exageradamente excêntrica apenas para efeitos de visualização pois visualmente é muito difícil distinguir uma elipse de excentricidade $\epsilon \sim 0.2$ de uma circunferência. Apenas Plutão ($\epsilon = 0.248$) tem órbita mais excêntrica que Mercúrio ($\epsilon = 0.206$).

A equação da elipse é dada por

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (\text{F.2})$$

onde p é o conhecido *semilatus rectum*, ou seja, metade da menor corda focal (corda que passa pelo Sol) ¹. Para simplificar a notação, denotemos as as distâncias máximas e mínimas por

$$r_+ = r_{max} \quad (\text{afélio}) \quad r_- = r_{min} \quad (\text{periélio}). \quad (\text{F.3})$$

Denotemos também os ângulos e os valores das funções $A(r)$ e $B(r)$ (vide cap. 10) via

$$\phi_{\pm} = \phi(r_{\pm}), \quad A_{\pm} = A(r_{\pm}), \quad B_{\pm} = B(r_{\pm}), \quad (\text{F.4})$$

isto é

$$A_{\pm} = \left(1 - \frac{r_S}{r_{\pm}}\right)^{-1}, \quad B_{\pm} = 1 - \frac{r_S}{r_{\pm}}. \quad (\text{F.5})$$

A trajetória relativística $r = r(\phi)$ é dada pela integração da eq. (11.26) depois de a transformarmos de uma equação diferencial de r em τ para uma equação de ϕ em r

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(r)\ell^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{\ell^2}}} \quad (\text{F.6})$$

¹ O termo vem do latim *semi* = metade, *latus* = lado e *rectum* = reta. O *latus rectum* de uma cônica é a menor corda focal que ela possui. Para a circunferência o *semilatus rectum* é igual ao raio.

o que nos leva à

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr'}{r'^2} \frac{\sqrt{A(r')}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(r')\ell^2} - \frac{1}{r'^2} - \frac{c^2}{\ell^2}}} \quad (\text{F.7})$$

É relativamente simples mostrar que no limite de $r_S/r \rightarrow 0$ esta expressão se reduz ao resultado clássico

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr'}{\ell r'^2} \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{GM}{r'} - \frac{\ell^2}{r'^2} \right)}} \quad (\text{F.8})$$

Consideremos uma órbita que começa em (r_-, ϕ_-) , passando por (r_+, ϕ_+) e retornando ao periélio (r_-, ϕ_-) . O ângulo ϕ muda neste trajetória por um valor igual à $2(\phi_+ - \phi_-)$. No caso Newtoniano, essa diferença seria igual à 2π pois obviamente ϕ_+ e ϕ_- são diametralmente opostos e o periélio ocorreria exatamente na mesma posição que o periélio anterior. Portanto a diferença

$$\Delta\phi = 2(\phi_+ - \phi_-) - 2\pi \quad (\text{F.9})$$

corresponde à variação de ângulo do periélio depois de uma revolução do planeta em torno do Sol. O integrando na equação (F.1) é exatamente igual à $d\phi/dr$. Como r_{\pm} são pontos de máximo e mínimo respectivamente, para estes pontos vale $\frac{dr}{d\phi}|_{r_{\pm}} = 0$. Portanto o termo

$$D(r) = \frac{K^2}{B(r)\ell^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{\ell^2} \quad (\text{F.10})$$

no denominador da equação (F.6) de ser igual à zero em r_{\pm} , isto é

$$\frac{K^2}{B_+\ell^2} = \frac{1}{r_+^2} + \frac{c^2}{\ell^2} \quad e \quad \frac{K^2}{B_-\ell^2} = \frac{1}{r_-^2} + \frac{c^2}{\ell^2}. \quad (\text{F.11})$$

Uma vez que temos 2 equações, escrever as constantes K^2/ℓ^2 e c^2/ℓ^2 escrevendo-as em função de r_+ e r_-

$$\frac{K^2}{\ell^2} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_-^2 r_+^2 (1/B_+ - 1/B_-)} \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{c^2}{\ell^2} = \frac{r_+^2/B_+ - r_-^2/B_-}{r_-^2 r_+^2 (1/B_+ - 1/B_-)}. \quad (\text{F.13})$$

Com isto podemos reescrever o denominador $D(r)$, eq. (F.10), como

$$D(r) = \frac{r_-^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_-} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_+} \right)}{r_-^2 r_+^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \quad (\text{F.14})$$

Com isto ficamos com um integrando em () que depende apenas de r_+ , r_- e de r_S . Como proceder agora? Esta integral não admite solução

em termos de expressões analíticas mais simples por se tratar de uma integral elíptica. A ideia então para obtermos uma resposta é lembrar que, fisicamente, a correção ao potencial Newtoniano pode ser tratada como uma perturbação ou, se preferirmos, a métrica de Schwarzschild se desvia muito pouco da métrica de um espaço plano no limite de campos fracos. Ou seja, lembrando que

$$B(r) = 1 - \frac{r_S}{r} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \quad (\text{F.15})$$

e que nos casos de interesse $r_S \ll r$, podemos pensar numa expansão deste termo em ordens de potência de (r_S/r) e resolver a integral perturbativamente. A expansão para $B(r)$ (e evidentemente $A(r)$) é conhecida como *expansão de Robertson*. Ela vale

$$\begin{aligned} B(r) &= 1 - 2\frac{GM}{rc^2} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 + \dots \\ A(r) &= 1 + 2\gamma\frac{GM}{rc^2} + \dots \end{aligned}$$

Expansão de Robertson

Neste ponto podemos nos perguntar por qual motivo não usamos simplesmente a expansão em série de Taylor no lugar de introduzirmos os termos β e γ na expansão acima. A razão é histórica: a expansão foi originalmente proposta por A. S. Eddington e depois reformulada por H. P. Robertson ² a partir da forma da métrica de Schwarzschild conhecida como **forma isotrópica**:

$$ds^2 = H(\rho)c^2 dt^2 - J(\rho) \left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (\text{F.16})$$

Esta forma isotrópica pode ser obtida a partir da forma “usual”

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - C(r) r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (\text{F.17})$$

substituindo no lugar de $A(r)$ a expressão $A(r) = G(r) + C(r)$ e redefinindo a variável ρ via

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r} \sqrt{1 - \frac{G(r)}{C(r)}} \quad (\text{F.18})$$

No trabalho original de Robertson buscou-se assim uma expansão para $H(\rho)$ e $J(\rho)$ em potências de $GM/\rho c^2$ na forma

$$\begin{aligned} H(x) &= 1 - x + 2\beta x^2 + \dots \\ J(x) &= 1 + 2\gamma x + \dots \\ \text{onde } x &= \frac{GM}{\rho c^2} \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

O sentido físico da expansão de Robertson é o seguinte: se expandirmos a métrica desta maneira, com diferentes β, γ , os efeitos físicos previstos dependerão destes parâmetros. Através de experimentos podemos então determinar estes

² H.P. Robertson in *Space Age Astronomy*, A. J. Deutsch and W. B. Klemperer (eds.), Academic Press, New York, 1962; A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd. edition, Cambridge University Press, 1924, p. 105.

parâmetros verificando quais os termos de correção à gravitação de Newton. Em princípio isso significa que temos uma certa liberdade de ajustá-los para que melhor se encaixem aos resultados observados e verificar se o experimento nos leva à valores diferentes daqueles previstos pela TRG (e quão diferentes). Para a Relatividade Geral com métrica de Schwarzschild e para a Teoria de Gravitação Newtoniana os valores teóricos deste parâmetros são

$$\begin{aligned} \beta = 1, \quad \gamma = 1 & \quad (TRG) \\ \beta = 0, \quad \gamma = 0 & \quad (Newton) \end{aligned} \quad (F.20)$$

Esta expansão é usada muito comumente na Relatividade Geral quando se quer estimar correções relativísticas à grandezas conhecidas da gravitação clássica.

Usemos agora na expressão (F.14) para $D(r)$ a expansão de Robertson para $A(r)$ e $B(r)$, que neste caso vale

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 + \gamma \frac{r_S}{r} \\ B(r) &= 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \left(\frac{r_S}{r}\right)^2 \\ \frac{1}{B(r)} &= 1 + \frac{r_S}{r} + \frac{1}{2}(2 - \beta + \gamma) \left(\frac{r_S}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (F.21)$$

em (F.14) obtemos uma forma quadrática em na variável $1/r$. É importante notar que na expansão de $B(r)$ acima fomos até termos de ordem $(r_S/r)^2$, uma ordem à mais que a expansão de $A(r)$. Isto ocorre pois no movimento dos planetas no entorno do Sol vale $v^2/c^2 \sim r_S/r$. Os termos da quadravelocidade $g_{00}u^0 u^0 \sim Bc^2$ e $g_{ii}u^i u^i \sim Av^2 \sim Ac^2 r_S/r$ mostram que o segundo termo é uma ordem mais alta em r_S/r quando comparado ao primeiro termo. Por isso temos que expandir $B(r)$ até segunda ordem para que os dois termos fiquem com a mesma ordem. O fato de $K(r_+) = K(r_-) = 0$ significa que podemos escrever K na forma

$$K = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (F.22)$$

onde C é uma constante a ser determinada. Comparando esta expressão com a expressão (F.14) para $r \infty$ podemos, depois de um pouco de álgebra, achar o valor da constante C

$$C = \frac{r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+}\right) - r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-}\right)}{r_+ r_- \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \quad (F.23)$$

Com o valor de $1/B(r)$ dado pela expansão de Robertson isto se torna

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma) \left(\frac{r_S}{r_+} + \frac{r_S}{2r_-} \right) \quad (F.24)$$

Resta-nos agora resolver a integral original que, depois destas aproximações, se torna

$$\phi_+ - \phi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{r_S}{2r}\right) \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{F.25})$$

A solução desta integral se dá por substituição trigonométrica

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \sin \psi \quad (\text{F.26})$$

onde aos valores $r = r_+$ e $r = r_-$ correspondem os valores $\psi = \pi/2$ e $\psi = -\pi/2$ respectivamente. Temos também

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \cos \psi d\psi \\ \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right) (1 + \sin \psi) \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right) (1 - \sin \psi) \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

o que nos leva finalmente à integral

$$\begin{aligned} \phi_+ - \phi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} d\psi \left[1 + \frac{\gamma r_S}{4} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \right. \\ \left. + \frac{\gamma r_S}{4} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \sin \psi \right] \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

A solução deste integral é trivial. Vamos expressar o resultado em termos do parâmetro p da elipse, o *semilatus rectum*, cuja definição é :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \quad (\text{F.29})$$

Podemos escrever a solução de (F.28) como

$$\begin{aligned} \phi_+ - \phi_- = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \left(1 + \gamma \frac{r_S}{2p}\right) &= \pi \left[1 + (2 - \beta + \gamma) \frac{r_S}{2p} \right] \left[1 + \gamma \frac{r_S}{2p} \right] \\ &\approx \pi \left[1 + (2 - \beta + 2\gamma) \frac{r_S}{2p} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

Com isto chegamos ao valor da precessão $\Delta\phi$ para uma revolução completas

$$\Delta\phi = \frac{\pi r_S}{p} (2 - \beta + 2\gamma) \quad \text{Precessão do Periélio} \quad (\text{F.31})$$

Lembrando que para a TRG temos $\beta = \gamma = 1$ podemos escrever

$$\Delta\phi = \frac{3\pi r_S}{p} = \frac{3\pi r_S}{a(1 - \epsilon^2)} \quad \text{Precessão do Periélio} \quad (\text{F.32})$$

onde usamos a relação entre o *semilatus rectum* p , a excentricidade ϵ e o valor a do semieixo maior da elipse:

$$p = a(1 - \epsilon^2) \quad (\text{F.33})$$

Esta dedução parece excessivamente complicada: poderíamos ter feito o mesmo simplificando a notação, isto é, usando a variável $u = 1/r$ e escrevendo a equação (F.1) na forma

$$\phi_+ - \phi_- = - \int_{u_-}^{u_+} du \frac{\sqrt{A(u)}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(u)\ell^2} - u^2 - \frac{c^2}{\ell^2}}} = \int_{u_+}^{u_-} du \frac{\sqrt{A(u)}}{\sqrt{\frac{K^2}{B(u)\ell^2} - u^2 - \frac{c^2}{\ell^2}}} \quad (\text{F.34})$$

e aplicar o mesmo procedimento. Isto por exemplo é feito no livro do Foster e Nightingale ou no texto de Rebhan. A dedução aqui apresentada é baseada em Weinberg e Fließbach e tem uma ligeira vantagem sobre as outras. Primeiro, ela dá sentido ao desenvolvimento de Eddington e posteriormente Robertson como métodos que procuram determinar experimentalmente as correções de Schwarzschild à gravitação Newtoniana através da introdução de parâmetros na expansão das funções $B(r)$ e $A(r)$. A comparação entre o valor medido da precessão e a expressão por nós obtida levou à

$$\frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} = 1.000 \pm 0.001 \quad (\text{F.35})$$

onde o valor de γ foi obtido de outros experimentos³. Isto resultou em um valor experimental de β

$$\beta = 1.000 \pm 0.003 \quad (\text{F.36})$$

Este resultado experimental confirma o valor teórico da TRG de $\beta = 1$ e o fato que a solução de Schwarzschild tem sentido físico. Uma vez que β é o coeficiente do termo não linear da expansão de Robertson, isto serviu de teste para a não linearidade das Equações de Einstein. A outra vantagem deste método é que ele permite, a todo tempo, que controlemos a ordem de grandeza das variáveis envolvidas.

O argumento apresentado aqui é originalmente devido à Møller.

³ O experimento de Shapiro, também conhecido como atraso do eco do radar. O valor de γ aí obtido é de $\gamma = 1.0000 \pm 0.0002$.

G

Os símbolos de Christoffel e coordenadas curvilíneas

O objetivo deste apêndice é exemplificar alguns dos conceitos do cálculo tensorial fazendo uso de coordenadas curvilíneas no plano \mathbb{R}^2 e entender geometricamente o que os símbolos de Christoffel representam.

Os símbolos de Christoffel são fundamentais quando estamos tentando entender a geometria de espaços curvos. Vamos por este motivo, antes de defini-los de maneira formal, tentar entender o que significam exatamente num contexto mais conhecido.

Começemos por uma motivação física: imagine que queiramos ver como um campo vetorial varia no espaço, no caso um campo vetorial \mathbf{A} que varia ao longo de uma curva, como ilustrado na figura abaixo. Este campo pode por exemplo representar a velocidade do vento numa região montanhosa. Normalmente quando queremos descrever a variação

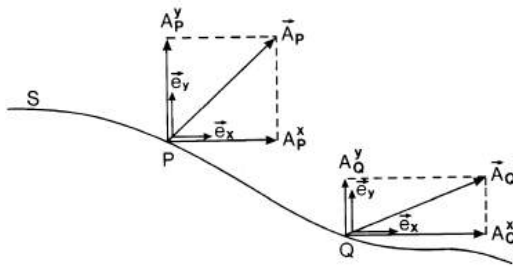


Figura G.1: Figura superior: a variação do vetor \mathbf{A} ao longo de uma curva em função dos vetores cartesianos \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_y . O vetor \mathbf{A} pode representar por exemplo um campo de velocidade do vento sobre uma determinada topografia. Fonte: Grøn e Næss.

do vetor ao longo de uma curva S que contém os pontos P e Q acima, é importante termos em mente que a curva é parametrizada em termos de uma variável λ , isto é $x^a = x^a(\lambda)$. No caso mais simples possível de um sistema de coordenadas cartesianas, temos que a diferença entre os vetores \mathbf{A}_P e \mathbf{A}_Q

$$\mathbf{A}_P = A_P^x \mathbf{e}_x + A_P^y \mathbf{e}_y; \quad \mathbf{A}_Q = A_Q^x \mathbf{e}_x + A_Q^y \mathbf{e}_y, \quad (\text{G.1})$$

ou seja

$$(\Delta \mathbf{A})_{PQ} = \mathbf{A}_P - \mathbf{A}_Q \quad (\text{G.2})$$

se torna, no limite de uma variação infinitesimal

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} = \frac{d(A^x \mathbf{e}_x)}{d\lambda} + \frac{d(A^y \mathbf{e}_y)}{d\lambda} \quad (\text{G.3})$$

No caso do sistema cartesiano este resultado é trivial, pois os vetores da base são constantes no espaço:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} &= \frac{dA^x}{d\lambda} \mathbf{e}_x + A^x \underbrace{\frac{d\mathbf{e}_x}{d\lambda}}_{=0} + \frac{dA^y}{d\lambda} \mathbf{e}_y + A^y \underbrace{\frac{d\mathbf{e}_y}{d\lambda}}_{=0} \\ &= \frac{dA^x}{d\lambda} \mathbf{e}_x + \frac{dA^y}{d\lambda} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Porém, se temos um sistema de coordenadas curvas, não cartesianas, a derivada total $d\mathbf{A}/d\lambda$ de um campo vetorial tem duas contribuições:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} = \frac{dA^\mu \mathbf{e}_\mu}{d\lambda} = \underbrace{\frac{dA^\mu}{d\lambda} \mathbf{e}_\mu}_{\text{var. das componentes}} + A^\mu \underbrace{\frac{d\mathbf{e}_\mu}{d\lambda}}_{\text{var. da base}}. \quad (\text{G.5})$$

Em outras palavras, a variação de um campo vetorial nada mais é que a derivada usual de um campo vetorial pela variação das coordenadas (parametrizadas por λ que define uma curva) mais um termo de correção que diz como as coordenadas mudam. Como calcular esta mudança dos vetores da base? É justamente este o ponto onde a figura de Christoffel entra: ele determinou a variação total de um vetor numa linguagem que nos permite calcular a derivada acima independente da curvatura do espaço ou da base de vetores por nós usada.

Tomemos o plano euclídeo em duas dimensões mas onde, no lugar dos tradicionais vetores unitários da base cartesiana \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_y introduzimos o conhecido sistema de coordenadas polares (r, θ) como na figura abaixo. Nosso objetivo aqui é entender como os vetores da base mudam com a mudança de posição no plano.

Desenhemos os vetores radiais \mathbf{e}_r e os tangenciais \mathbf{e}_θ nos pontos P , Q , R e S . Vamos considerar primeiro a mudança do vetor \mathbf{e}_θ quando mudamos sua posição.

Antes lembremos que a mudança da base $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ para a base \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_θ é dada por

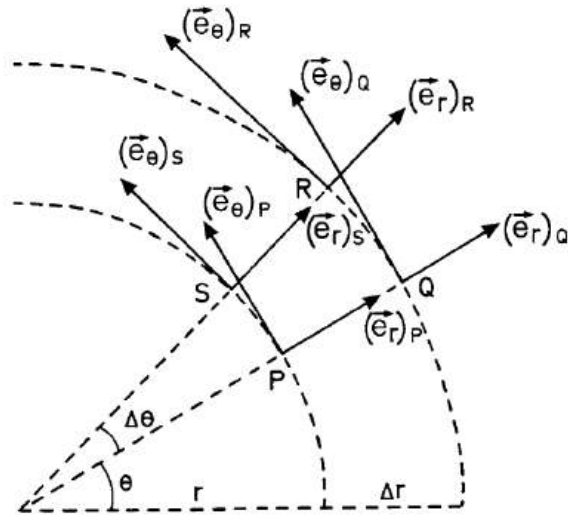
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

O vetor de base \mathbf{e}_r é unitário, independente da sua posição. Já a magnitude de \mathbf{e}_θ varia de acordo com a distância deste vetor à origem: para um mesmo deslocamento angular $\Delta\theta$, o arco descrito é maior quanto maior a distância à origem do eixo de coordenadas.

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_r| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \\ |\mathbf{e}_\theta| &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} = r. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$



Figura G.2: Elwin Bruno Christoffel (1829 - 1900).


 Figura G.3: Vetores da base de coordenadas polares (r, θ) no plano. Fonte: Grøn e Næss.

O vetor $\Delta_\theta \mathbf{e}_\theta$ é obtido pela diferença entre o vetor $\mathbf{e}_{\theta(S)}$ e o vetor $\mathbf{e}_{\theta(P)}$, como ilustra a figura ao lado. O arco de círculo L , segundo a definição de ângulo em radianos, vale:

$$L = |\mathbf{e}_\theta| \Delta\theta \quad (\text{G.8})$$

e como $|\mathbf{e}_\theta| = r$ temos

$$L = r\Delta\theta \quad (\text{G.9})$$

como era esperado. No limite em que $\Delta\theta \rightarrow 0$ podemos escrever a expressão no infinitesimal $d\theta$

$$\left| \frac{d}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \right| = |d_\theta \mathbf{e}_\theta| = r d\theta \quad (\text{G.10})$$

e como o vetor $d_\theta \mathbf{e}_\theta$ aponta na direção contrária ao vetor \mathbf{e}_r podemos escrever

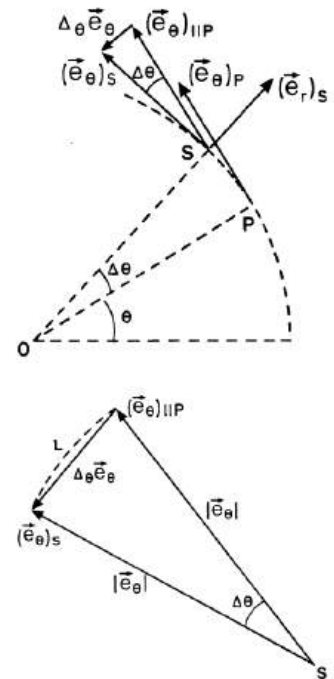
$$d_\theta \mathbf{e}_\theta = -r d\theta \mathbf{e}_r \quad (\text{G.11})$$

Este resultado nos mostra que o vetor $\mathbf{e}_{\theta(S)}$ está conectado ao vetor $\mathbf{e}_{\theta(P)}$ através de um “vetor diferença” ou “vetor de conexão”

$$d_\theta \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta(S)} - \mathbf{e}_{\theta(P)} \quad (\text{G.12})$$

As componentes deste vetor por unidade de comprimento na respectiva direção são chamados de **coeficientes de conexão** (*connection coefficients*) e são, neste caso, denotados por $\Gamma^r_{\theta\theta}$ e $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right)^r \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right)^\theta \mathbf{e}_\theta \\ &= \Gamma^r_{\theta\theta} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$


 Figura G.4: Figura superior: a variação do vetor \mathbf{e}_θ devido a um deslocamento angular $\Delta\theta$. Figura inferior: a diferença do vetor \mathbf{e}_θ em duas posições diferentes do espaço. A variação é dada pela diferença de vetores $\mathbf{e}_{\theta(S)} - \mathbf{e}_{\theta(P)}$, onde o último representa o vetor $\mathbf{e}_{\theta(P)}$ transportado paralelamente a si mesmo do ponto P ao ponto S . Fonte: Grøn e Næss.

onde definimos

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right)^r; \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right)^\theta \quad (\text{G.14})$$

Um certo cuidado aqui se faz necessário: os sobrescritos r e θ não indicam potência mas a componente contravariante do vetor. $\Gamma^r_{\theta\theta}$ e $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$ são mais comumente conhecidos na Teoria da Relatividade como **símbolos de Christoffel** e foram aqui calculados de forma puramente geométrica numa geometria por nós conhecida. Porém sua definição, como veremos abaixo, é geral e se aplicam a espaços curvos multidimensionais e portanto mais abstratos. Antes porém é importante enfatizarmos exatamente o significado da notação para que não nos confundamos quando seu uso se fizer necessário. Em palavras podemos escrever:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \begin{cases} \theta\theta \rightarrow & 1^\circ \text{ subíndice: qual vetor da base varia } (\mathbf{e}_\theta) \\ & 2^\circ \text{ subíndice: o quê varia (coordenada } \theta). \\ r \rightarrow & \text{a componente do vetor (radial)}. \end{cases}$$

Os índices inferiores indicam qual vetor da base está sendo variado pela mudança infinitesimal de qual coordenada. O índice superior indica a componente do vetor diferença ao qual o símbolo de Christoffel se refere. No caso específico que acabamos de estudar temos

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r; \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{G.15})$$

Definição: o símbolo de Christoffel $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$ é a ν -ésima componente do vetor que mede a variação, por unidade de comprimento, do vetor da base \mathbf{e}_μ causado pela variação infinitesimal da coordenada x^α .

Para melhor fixar o conceito, vamos agora calcular geometricamente os outros símbolos de Christoffel. Uma vez que o vetor \mathbf{e}_θ varia com a distância à origem do sistema de coordenadas, vejamos como ele varia por um deslocamento infinitesimal dr . Para isso recorreremos à figura ao lado:

O vetor $\Delta_r \mathbf{e}_\theta$ representa a variação do vetor \mathbf{e}_θ quando deslocado do ponto P ao ponto Q por uma distância Δr . Pela semelhança de triângulos representados na figura podemos ver que

$$\frac{|\Delta_r \mathbf{e}_\theta|}{\Delta r} = \frac{|\mathbf{e}_\theta|}{r} \quad (\text{G.16})$$

e portanto

$$|\Delta_r \mathbf{e}_\theta| = |\mathbf{e}_\theta| \frac{\Delta r}{r}. \quad (\text{G.17})$$

No limite $\Delta r \rightarrow 0$ obtemos

$$|d_r \mathbf{e}_\theta| = |\mathbf{e}_\theta| \frac{dr}{r} \quad (\text{G.18})$$

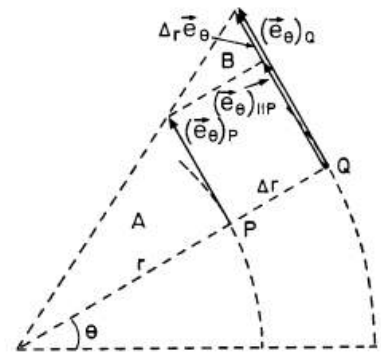


Figura G.5: a variação do vetor \mathbf{e}_θ devido a um deslocamento radial infinitesimal Δr . Fonte: Grøn e Næss.

e sendo que o vetor $d_r \mathbf{e}_\theta$ aponta na mesma direção e sentido de \mathbf{e}_θ podemos escrever

$$d_r \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} d r \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{G.19})$$

Com estas equações e a definição dos símbolos de Christoffel fica fácil ver que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta r}^r &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} \right)^r = 0 \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} \right)^\theta = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

Vamos agora repetir os cálculos para a variação infinitesimal do vetor de base \mathbf{e}_r . Como o vetor é unitário e não depende da distância à origem do sistema de coordenadas, temos imediatamente que

$$\Delta r \mathbf{e}_r = 0 \quad (\text{G.21})$$

o que já nos dá diretamente que $\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\theta = 0$ pois se o vetor $\Delta r \mathbf{e}_r$ é zero, suas componentes tem que ser zero. Vamos calcular a variação de \mathbf{e}_r em função do deslocamento infinitesimal $\Delta\theta$ (figura abaixo).

O círculo de arco L e raio $|\mathbf{e}_r| = 1$ vale, neste caso

$$L = |\mathbf{e}_r| \Delta\theta = \Delta\theta \quad (\text{G.22})$$

cujo valor, no limite infinitesimal $\Delta\theta \rightarrow 0$ se reduz à

$$|d_\theta \mathbf{e}_r| = d\theta \quad (\text{G.23})$$

Pela figura vemos que o vetor $d_r \mathbf{e}_r$ tem a mesma direção e sentido do vetor \mathbf{e}_θ e portanto pode ser escrito em termos do *versor* $\hat{\mathbf{e}}_\theta = (1/r) \mathbf{e}_\theta$ como

$$d_\theta \mathbf{e}_r = d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} d\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{G.24})$$

Disto concluímos diretamente que

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^r &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right)^r = 0 \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right)^\theta = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

É importante enfatizarmos que os símbolos de Christoffel estão relacionados às regras de mudança da base de vetores por variações das coordenadas e não descrevem o espaço em si pois, como já pudemos discorrer ao longo deste curso, uma coisa é o espaço e outra é a maneira que o representamos: coordenadas são etiquetas que podemos mudar à vontade. No caso mais geral possível de um sistema de coordenadas

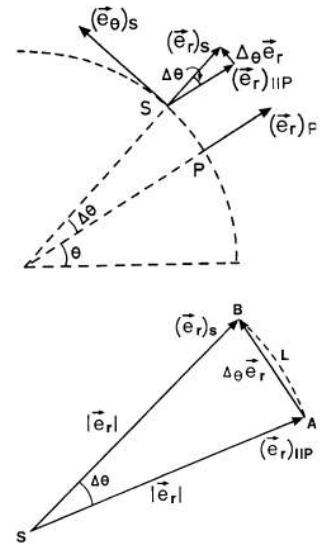


Figura G.6: a variação do vetor \mathbf{e}_r devido a um deslocamento radial infinitesimal $\Delta\theta$. O vetor $\mathbf{e}_{r(P)}$ é deslocado paralelamente a si mesmo até o ponto S , onde temos $\mathbf{e}_{r(S)} \parallel \mathbf{e}_{r(P)}$. A variação é dada pela diferença $\mathbf{e}_{r(S)} - \mathbf{e}_{r(P)}$. A figura inferior mostra a variação em maior detalhe. Fonte: Grøn e Næss.

x^1 e x^2 onde as curvas de coordenadas são realmente curvas (em nosso caso apenas uma delas era curva), temos 8 símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} & \Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^1_{22}, \\ & \Gamma^2_{11}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{21}, \Gamma^2_{22}. \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

No espaço n -dimensional o número de símbolos de Christoffel é n^3 mas, devido a certas propriedades de simetria, o número de $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ que devemos efetivamente calcular é menor. Resumindo temos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_\theta &= \Gamma^r_{\theta r} dr \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta r} dr \mathbf{e}_\theta + \Gamma^r_{\theta\theta} d\theta \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} d\theta \mathbf{e}_\theta, \\ d\mathbf{e}_r &= \Gamma^r_{rr} dr \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{rr} dr \mathbf{e}_\theta + \Gamma^r_{r\theta} d\theta \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{r\theta} d\theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

Usando a convenção de Einstein podemos escrever as expressões acima de forma mais elegante:

$$d\mathbf{e}_\mu = \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} dx^\alpha \mathbf{e}_\nu \quad (\text{G.28})$$

O procedimento adotado para calcular os símbolos de Christoffel é o seguinte:

- (1) escreva os vetores da nova base \mathbf{e}_μ em termos dos vetores da base original \mathbf{e}_m . No nosso caso $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ em termos de $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
- (2) calcule as derivadas dos vetores \mathbf{e}_μ como função das suas variáveis naturais, no caso acima as derivadas de $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ como função de (θ, φ) .
- (3) O resultado do item (2) ainda está expresso em termos da base \mathbf{e}_m . Reescreva o resultado em termos da base \mathbf{e}_μ . Os coeficientes que multiplicam os vetores da base são os símbolos de Christoffel procurados.

Em situações mais gerais os símbolos de Christoffel são calculados diretamente a partir da métrica $g_{\mu\nu}$, segundo

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \quad (\text{G.29})$$

G.0.1 Coordenadas esféricas

Um outro exemplo importante que nos ajuda a fixar melhor a idéia dos símbolos de Christoffel é quando temos o caso de coordenadas esféricas. Olhando para a figura abaixo onde representamos os vetores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_φ sabemos que as relações entre estas coordenadas e as coordenadas cartesianas (x, y, z) são dadas por

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{G.30})$$

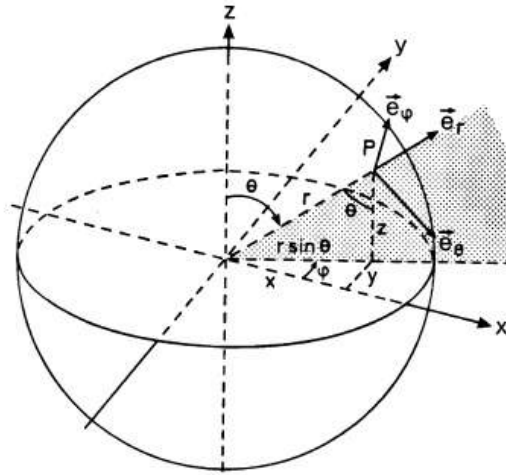


Figura G.7: Sistema de coordenadas esféricas com seus respectivos vetores nas direções (r, θ, ϕ) . Fonte: Grøn e Næss.

Precisamos calcular as variações dos respectivos vetores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_ϕ com a variação das coordenadas (r, θ, ϕ) . Para isto recorreremos à coordenadas cartesianas escrevendo ¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{G.31})$$

ou

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial x^m}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_m \quad \text{com} \quad \begin{cases} x^m \in \{x, y, z\} \\ x^\mu \in \{r, \theta, \phi\} \end{cases} \quad (\text{G.32})$$

Aplicando as definições temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= r(\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z), \\ \mathbf{e}_\phi &= r(-\sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

Queremos ver como estes vetores da base variam quando variamos r , θ e ϕ . Por isso derivamos mais uma vez a expressão acima nas variáveis (r, θ, ϕ) temos ²

¹ Note que vetores da base se transformam de maneira covariante, em acordo com o que já foi discutido anteriormente.

² A vantagem de usar a base cartesiana aqui fica clara pois os versores \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z não mudam com a posição no espaço!
© S.R. DAHMEN 2022

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_r &= (\cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z) d\theta \\
&\quad + (-\sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_x + \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_y) d\varphi \\
d\mathbf{e}_\theta &= (\cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z) dr \\
&\quad + (-r \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x - r \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y - r \cos\theta \mathbf{e}_z) d\theta \\
&\quad + (-r \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_x + r \cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_y) d\varphi, \\
d\mathbf{e}_\varphi &= (-\sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_x + \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_y) dr \\
&\quad + (-r \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_x + r \cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_y) d\theta \\
&\quad - (r \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + r \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y) d\varphi. \tag{G.34}
\end{aligned}$$

Para calcular os símbolos de Christoffel precisamos expressar estas variações em função dos vetores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_φ , ou seja, precisamos expressar $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ como função de $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ invertendo a equação (G.31). Com um pouco de manipulação algébrica é possível chegar à

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_r &= \frac{1}{r} d\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\
&= \Gamma_{r\theta}^\theta d\theta \mathbf{e}_\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\
d\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} dr \mathbf{e}_\theta - r d\theta \mathbf{e}_r + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\
&= \Gamma_{\theta r}^\theta dr \mathbf{e}_\theta + \Gamma_{\theta\theta}^r d\theta \mathbf{e}_r + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\
d\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r} dr \mathbf{e}_\varphi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \mathbf{e}_\varphi - r \sin^2\theta d\varphi \mathbf{e}_r \\
&\quad - \sin\theta \cos\theta d\varphi \mathbf{e}_\theta \\
&= \Gamma_{\varphi r}^\varphi dr \mathbf{e}_\varphi + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi d\theta \mathbf{e}_\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^r d\varphi \mathbf{e}_r + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta d\varphi \mathbf{e}_\theta \tag{G.35}
\end{aligned}$$

Estas expressões nos dão diretamente os símbolos de Christoffel para coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{rr}^r &= 0 \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2\theta, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta. \tag{G.36}
\end{aligned}$$

G.0.2 Simetria dos símbolos de Christoffel

Como pudemos perceber, calcular os símbolos de Christoffel envolvem bastante trabalho. Porém, os símbolos de Christoffel possuem simetrias

que por vezes nos servem de atalho. Quando partimos de uma base \mathbf{e}_m onde $m = (x, y, z)$ por exemplo, e queremos chegar numa base \mathbf{e}_μ , onde $\mu = (r, \theta, \varphi)$ sabemos que a relação entre os vetores de uma base e outra é dada pela expressão

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial x^m}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_m \quad (\text{G.37})$$

Esta foi a equação que usamos acima para expressar a base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ em função da base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Por outro lado a derivada *total* de um campo vetorial é semelhante em sua forma à derivada total de um campo escalar

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_\mu &= \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\underbrace{\frac{\partial x^m}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_m}_{=\mathbf{e}_\mu} \right) dx^\alpha \\ &= \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} dx^\alpha dx^\nu \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (\text{G.38})$$

Mas pela definição (G.28) dos símbolos de Christoffel temos

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \mathbf{e}_\nu \quad (\text{G.39})$$

Comparando as duas expressões temos

$$\mathbf{e}_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \mathbf{e}_m \quad (\text{G.40})$$

Como $\partial^\alpha \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\alpha$ temos que

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \quad (\text{G.41})$$

isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos por troca de índices.

Resumindo: embora os símbolos de Christoffel possam parecer algo extremamente abstrato, eles nada mais são que a medida da variação dos vetores de uma base quando nos movemos pelo espaço. No caso de coordenadas cartesianas estes símbolos são iguais a zero, pois não só $\mathbf{e}_x = \hat{i}$ mas também $\mathbf{e}_y = \hat{j}$ e $\mathbf{e}_z = \hat{k}$ não dependem da coordenada (x, y, z) . Eles apontam sempre para a mesma direção do espaço e tem magnitude 1. Já para coordenadas curvilíneas, mesmo sendo o espaço plano, os vetores da base dependem em direção e magnitude da coordenada do ponto onde se encontram. O caso mais simples é o de coordenadas polares (r, θ) no \mathbb{R}^2 , pois embora \mathbf{e}_r tenha sempre a mesma magnitude 1 em qualquer ponto do espaço, sua direção muda com o ângulo θ . Já o vetor \mathbf{e}_θ não apenas muda em magnitude (linearmente

em r) como muda também de direção quando nos movemos no espaço. Portanto, quando dois vetores representando uma mesma grandeza física (a velocidade por exemplo) é comparado em diferentes pontos do espaço, devemos levar em consideração que estes vetores podem ser diferentes devido à variações intrínsecas de magnitude e direção, mas também que mesmo que estas suas propriedades não variem, os vetores da base \mathbf{e}_μ podem ter mudado. Neste caso a representação do vetor muda.

Aplicação: a aceleração em coordenadas curvilíneas. De novo temos aqui um plano descrito pelas coordenadas polares (r, θ) . Nestas variáveis, a velocidade \mathbf{v} de uma partícula pode ser escrita em termos de suas componentes na forma:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{G.42})$$

Nosso objetivo é calcular a aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{G.43})$$

em coordenadas polares. Para isto vamos usar a expressão (??) trocando índices gregos por latinos por uma questão de familiaridade

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} = \frac{dA^k}{d\lambda} \mathbf{e}_k + \Gamma^k_{ij} A^i \dot{\lambda}^j \mathbf{e}_k \quad (\text{G.44})$$

No nosso caso $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ e $\lambda = t$. Com esta substituição a expressão acima fica:

$$\mathbf{a} = (\dot{v}^k + \Gamma^k_{ij} v^i \dot{v}^j) \mathbf{e}_k \quad (\text{G.45})$$

Em coordenadas plano-polares há apenas 3 símbolos de Christoffel diferentes de zero: $\Gamma^r_{\theta\theta}$ e $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r}$. Ficamos assim com a expressão

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} + \Gamma^r_{\theta\theta} \dot{\theta} \dot{\theta}) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\Gamma^{\theta}_{r\theta} \dot{\theta} \dot{r}) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{G.46})$$

Sendo $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$ e $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = 1/r$ a expressão acima se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \dot{r}) \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \dot{r}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{G.47})$$

Este resultado, que nos livros de mecânica é deduzido de outra forma, mostra como o formalismo covariante permite estudarmos a variação de qualquer vetor quando os vetores da base também variam. Usamos também a notação mais usual dos versores por uma questão de familiaridade.

H

Buracos negros de Reissner-Nordstrøm

Nosso objetivo aqui é discutir buracos negros que têm, além de uma massa M , uma carga Q não nula. Estes buracos negros são considerados até certo ponto um exercício matemático em soluções exatas das Equações de Einstein pois caso houvesse um buraco negro deste tipo, sua carga seria rapidamente neutralizada por interações com cargas na sua vizinhança. Mas soluções estacionária na TRG são interessantes sob outros aspectos também. Portanto vamos aqui olhar com um pouco mais de cuidado estes objetos pois eles nos dão uma idéia geral dos tipos de soluções exatas estacionária possíveis na TRG.

H.1 Considerações gerais

Buracos negros estão entre os objetos mais fascinantes da natureza. Isto decorre não apenas do fato de possuírem um horizonte de eventos mas também, segundo o *no-hair theorem*, de serem caracterizados apenas por três grandezas físicas: sua massa, momento angular e carga. Mas por qual motivo isto ocorre?

Segundo o [Teorema de Birkhoff](#), a solução de Schwarzschild é a única solução esfericamente simétrica para as Equações de Campo de Einstein no vácuo. Na prática há um sem número de soluções possíveis das equações, como por exemplo o campo gravitacional da Terra: devido à forma não esférica e as diferentes densidades das rochas e configurações de relevo entre outras coisas, é de se esperar que rigorosamente falando o campo não apenas não seja esfericamente simétrico mas também não seja estacionário. Poderíamos então tentar determinar com mais precisão o campo gravitacional terrestre usando uma aproximação do tipo expansão em multipolos, como fazemos no Eletromagnetismo.

Por isto o teorema que diz que o buraco negro é caracterizado por apenas três grandezas físicas não deixa de ser algo surpreendente. Há um número pequeno de soluções estacionárias para buracos negros, e a de Reissner-Nordstrøm é uma delas. Nosso interesse em soluções esta-

cionárias advém do fato que acredita-se que elas representam o estágio final do colapso gravitacional. Poderíamos até pensar em situações não estacionárias, com uma configuração de massas que oscilam ou algo semelhante. Porém se este fosse o caso, esta configuração perderia rapidamente energia na forma de ondas gravitacionais e evoluiria para um estado estático.

Para entendermos melhor o quão fascinante é esta questão, sem entrarmos nos detalhes específicos das teorias mais recentes, o ponto central é que soluções que levam a buracos negros são caracterizadas por um número pequeno de parâmetros, enquanto aquelas que dizem respeito a outros astros devem ter um número gigante de parâmetros. Isto, expresso na forma do teorema *no-hair*, leva a uma situação paradoxal: na física, de um modo geral, em particular nas teorias determinísticas – e a TRG é determinística – dadas as condições iniciais de um problema, somos capazes de prever seu futuro (ou entender seu passado) uma vez dadas todas as informações acerca do sistema em qualquer instante de tempo t . Isto significa, em termos práticos, que quaisquer dois estados conectados por uma solução requerem a mesma quantidade de informação para sua descrição. O que a TRG parece nos dizer é que podemos pegar um objeto extremamente complexo como uma estrela e colapsá-la em um buraco negro, ficando assim com um objeto que pode ser descrito apenas em função de sua massa, carga e momento angular. Para onde foi toda a informação? Na gravitação clássica, podemos simplesmente dizer que a informação está contida dentro do buraco negro, escondida de nós pelo horizonte de eventos ¹. Uma teoria quântica de gravitação leva porém ao aparente desaparecimento desta informação pois buracos negros “evaporam” emitindo radiação de Hawking. Acredita-se que a radiação de alguma maneira carregue em si esta informação sobre o estado original do astro que colapsou naquele buraco negro, mas como isto ocorre ninguém sabe exatamente. Para muitos um ponto-chave na construção de uma teoria quântica de gravitação fisicamente plausível passa por entendermos este famoso “paradoxo da perda de informação”.

¹ Quando um(a) cientista da área fala em *gravitação clássica*, ele(a) está se referindo à TRG e não à gravitação *a la* Newton. A TRG de Einstein é uma teoria clássica. Uma dos grandes desafios atuais em física teórica é construir uma teoria de gravitação que seja quântica.

H.2 A métrica

A métrica de Reissner-Nørdstrom (RN) é obtida de maneira muito análoga àquela por nós utilizada para obtermos a métrica de Schwarzschild no vácuo: partimos da forma geral da métrica do tipo

$$ds^2 = B(r) c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (\text{H.1})$$

com a diferença que esta métrica deve agora satisfazer Equações de Campo de Einstein que tem um termo de fonte do lado direito das equações. Esta fonte é devido à presença de um campo elétrico e

portanto com tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (\text{H.2})$$

onde $F_{\mu\nu}$, o tensor de tensões de Maxwell, tem um termo relativo ao campo elétrico radial E_r (estamos assumindo que a carga está na singularidade do buraco negro). Em outras palavras

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{H.3})$$

Com este termo de fonte, a solução das Equações de Einstein é dada pela métrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)} - r^2 d\Omega^2 \quad (\text{H.4})$$

$$r_Q^2 = \frac{G}{4\pi\epsilon_0 c^4} Q^2 \quad r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{H.5})$$

Vamos tentar entender melhor este tipo de solução, *i.e.* a métrica RN. Primeiro, ela tem uma singularidade verdadeira em $r = 0$ onde a métrica diverge. Isto podemos verificar a exemplo do que fizemos no estudo de buracos negros estudando o escalar de Kretschmann discutido nas notas de aula: $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Esta curvatura diverge em $r = 0$. O horizonte de eventos porém tem uma estrutura um pouco mais complicada, ou seja, ele é dado pela expressão

$$1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} = 0 \quad (\text{H.6})$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 4r_Q^2} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left[GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Dependendo do valor do discriminante $\Delta = r_S^2 - 4r_Q^2$ ser positivo ou negativo temos diferentes soluções para o horizonte de eventos. Vamos estudar os casos separadamente. Mas antes disto é importante notar que na métrica de Schwarzschild pura a singularidade $r = 0$ é uma superfície tipo-espaço e está invariavelmente no futuro de qualquer trajetória tipo-tempo ou tipo-luz dentro do buraco negro. Na métrica RN a singularidade $r = 0$ é uma linha tipo-tempo. Isto significa que não necessariamente ela faz parte do futuro de qualquer partícula, massiva ou não.

(A) Caso tenhamos $\Delta < 0$, ou seja $r_S^2 < 4r_Q^2$ ou ainda $GM^2 < \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$, não há soluções reais para a equação (H.7) e portanto **não existe horizonte de eventos**. A métrica é regular até $r = 0$. Como não existe horizonte de eventos, nada impede que um viajante viaje até perto da singularidade e retorne para contar o que viu. Este tipo de singularidade é o que se denomina **singularidade nua** (*naked singularity*) na Relatividade Geral. Em resumo, uma singularidade nua é uma que não está “escondida” atrás de um horizonte de eventos. Como singularidades nuas nunca foram observadas, acredita-se que elas não existam e para expressar esta inexistência existe a chamada **conjectura da censura cósmica** (*cosmic censorship conjecture*) que diz:

Singularidades nuas não podem ser formadas a partir do colapso gravitacional de estados iniciais gerais não singulares de um espaço assintoticamente plano. Em outras palavras, começando de uma solução regular das Equações de Einstein que seja assintoticamente plana, se o astro em questão colapsar, ele não o fará na forma de uma singularidade nua.

A discussão de singularidades em TRG é importante pois elas surgem em diversas soluções das Equações de Einstein e há um teorema de Penrose e Hawking que diz que quando o colapso atinge um certo ponto, a evolução para uma singularidade é inevitável. Portanto entender singularidade é essencial para entender a evolução de estrelas que colapsam. Um outro detalhe muito importante desta solução é que a condição $\Delta < 0$ é equivalente a dizer que

$$GM^2 < \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (\text{H.8})$$

Esta condição basicamente diz que a energia total do buraco negro é menor que a contribuição à energia devido ao campo elétrico. Ou seja, você soma uma energia e a energia total se torna menor que a soma das partes. Isto implicaria que a massa da carga Q teria que ser negativa, e portanto esta condição é tida como fisicamente impossível. A solução portanto não teria realidade física.

(B) O caso $\Delta > 0$, ou seja $r_S^2 > 4r_Q^2$ ou $GM^2 > \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$. Esta situação é realística pois ela nos diz que a energia total do buraco negro é maior que a energia do campo eletromagnético sozinho. A métrica tem 2 singularidades removíveis em r_+ e r_- segundo a equação (H.7). A remoção da se dá por uma mudança de coordenadas apropriada (extensão analítica). r_+ e r_- definem cada um um horizonte de eventos.

Se você for um observador externo, o comportamento em r_+ é o mesmo que em r_S da métrica de Schwarzschild: um objeto que cai em direção à r_+ parece se mover cada vez mais lentamente

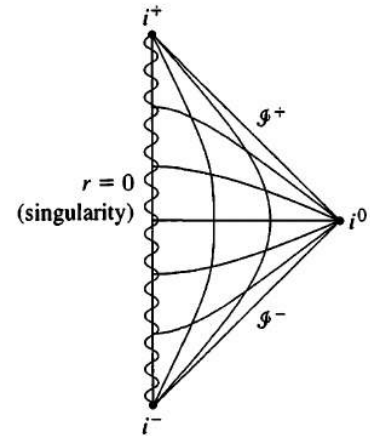


Figura H.1: Representação conforme de Penrose para uma singularidade nua. Lembrem-se (v. fig. 6 da Lista 4) que as curvas de baixo para cima representam curvas de r constante e as linhas da esquerda para a direita representam curvas de t constante. Notem também que a singularidade é uma linha tipo-tempo e portanto não necessariamente faz parte do futuro de um viajante que dela se aproxima. Fonte: S. Carroll, *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*, Pearson, Harlow, 2014, p. 257.

e o desvio para o vermelho aumenta gradativamente. Quando o objeto que cai passa pelo horizonte de eventos, o termo g_{00} e g_{rr} da métrica trocam de sinal: a coordenada r passa a ser tipo-tempo e o corpo obrigatoriamente se move na direção de r decrescente pois isso corresponde a um intervalo de tempo Δr positivo. Essa queda para dentro do buraco negro continua até que se atinja r_- , onde a partícula em questão pode então “decidir” cair até $r = 0$ ou não! Como entender isto? Primeiro, para $r < r_-$ a coordenada r passa a ser novamente tipo-espaco. O que porém acontece é que a linha que representa a singularidade $r = 0$ no diagrama conforme de Penrose passa a ser tipo-tempo, ou seja, paralela ao eixo T nas coordenadas apropriadas. Se você olhar para a figura 7 da lista 4, verá que a singularidade é uma linha tipo espaco (paralela ao eixo R) e portanto está sempre no futuro da partícula. Ela inevitavelmente vai para $r = 0$. Na Relatividade, uma curva tipo-tempo não necessariamente faz parte do seu futuro pois dentro do cone de luz você pode se mover com uma linha tipo tempo que nunca se encontra com a linha $r = 0$. Se você decide se mover para fora de r_- você será invariavelmente jogado para fora do buraco negro, e isto seria na verdade o equivalente ao que acontece com um buraco branco. Você pode entrar e sair quantas vezes quiser e isto se reflete no diagrama de Penrose pois ele tem uma série de cópias do buraco negro representando diferentes viagens para dentro e fora do mesmo.

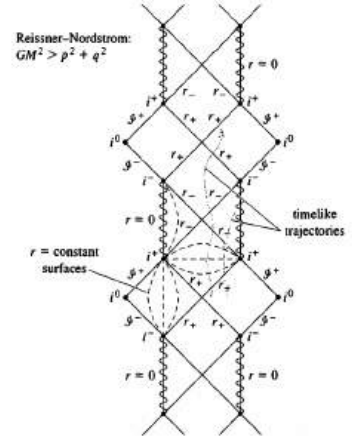


Figura H.2: Representação conforme de Penrose para o caso $GM^2 > \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$ com respectivas cópias do buraco negro, o que significa sucessivas possibilidades de entrar e sair do buraco negro de RN. Fonte: S. Carroll, *op. cit.* p. 258.

(C) O caso $\Delta = 0$, ou seja $r_S^2 = 4r_Q^2$ ou $GM^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$. Este é o conhecido *extreme RN blackhole*. Este tipo de buraco negro é muito usado em estudos de gravitação quântica em função de certas propriedades matemáticas da solução que facilitam os cálculos. Ele portanto é mais usado como um *toy model* do que uma possibilidade verdadeira. Isto porque eles seriam realmente instáveis, uma vez que um pequeno acréscimo de carga os transformaria em buracos negros do caso (B). Estes buracos negros tem um horizonte de eventos em $r = GM/c^2$ mas novamente a linha $r = 0$ é uma linha tipo-tempo (figura ao lado) e você pode entrar e sair do buraco negro à vontade. Uma discussão mais detalhada destes buracos negros extremos é feita no livro de Carroll.

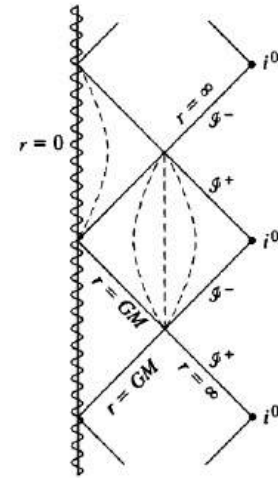


Figura H.3: Representação conforme de Penrose para o caso $GM^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$, os chamados buracos negros extremos de Reissner-Nordstrøm. Neste buraco negro também é possível entrar e sair quantas vezes necessário. Fonte: S. Carroll, *op. cit.*, p. 259.

Para responder à questão do que aconteceria se jogássemos uma carga q para dentro do buraco negro, há uma série de fatores a considerar. Primeiro existe uma diferença se a carga é negativa ou positiva. Vamos assumir que a carga Q do buraco negro seja positiva para facilitar a discussão.

Se a carga q for negativa ela será atraída para dentro do buraco negro de qualquer maneira. Se a carga q for positiva, ela seria repelida mas, dependendo da massa m da carga, a força gravitacional atrativa pode

ser maior que a repulsão Coulombiana. Vamos supor então que neste caso a massa m seja grande o suficiente para que q entre no buraco negro.

Se o buraco negro for do tipo extremo, isto fará com que ele se transforme ou no tipo (A) ou no tipo (B) pois o equilíbrio $M = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 G}$ será quebrado. Se a carga q for positiva, poderemos ter uma evolução para o tipo (A), uma singularidade nua, ou para o tipo (B). Isto vai depender do valor da massa m . Se $M + m < \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 G}$, caímos na singularidade nua. Caso contrário, quando $M + m > \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 G}$ caímos no caso (B). Se a carga for negativa, a única possibilidade é ir para (B) pois o lado direito da igualdade aumentará e o lado esquerdo diminuirá, ou seja

$$M = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 G} \longrightarrow M + m > \frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 G} \quad (\text{H.9})$$

Para um buraco negro do tipo (B) a desigualdade $GM^2 > \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$ vai permanecer alterada se no buraco negro entrar uma carga negativa. Isto ocorre pois haverá um acréscimo de massa do lado direito e uma diminuição de carga do lado esquerdo. Uma carga negativa altera a posição de r_+ e r_- mas não o tipo de buraco negro. Já uma carga positiva pode fazer o buraco continuar do tipo (B), o que não é muito interessante, mas transformá-lo num buraco extremo (C) ou numa singularidade nua (A). A singularidade nua é teoricamente possível mais improvável, pois temos que inverter o sinal da igualdade. Isto significa ter uma carga grande o suficiente e uma massa pequeno o suficiente para que isto ocorra, mas neste caso a força gravitacional pode não ser suficiente para que a carga q positiva seja atraída para dentro do buraco negro. A força de Coulomb pode ser maior.

Se tivermos finalmente uma singularidade nua (A) pode ocorrer uma transição para os tipos (B) e (C) e ela virar um buraco negro. Isto ocorre mais facilmente com uma carga q negativa, que diminuirá o lado direito da igualdade e aumentará o lado esquerdo, até o ponto em que os dois se tornem iguais (buraco negro tipo C) ou o lado esquerdo se torne maior (buraco negro tipo B). Uma carga positiva pequena – desde que sua massa seja grande o suficiente – consegue também inverter o sinal da igualdade. A diferença é que para cargas q de mesmo módulo mas sinais contrários, a carga negativa precisa ter uma massa menor que a carga positiva de mesmo módulo.

I

O paradoxo de Olbers

O Paradoxo de Olbers como todos sabem é o paradoxo que diz que se o Universo é infinito, então as noites deveriam ser claras como o dia. O paradoxo mudou de formulação ao longo da história mas em 1965 o astrofísico inglês E. R. Harrison deu uma solução para o problema dentro do contexto da métrica de FLRW baseado em idéias anteriores de G. J. Whitrow e B. D. Yallop (adiciono a este texto o PDF de Harrison onde ele conta um pouco da história do paradoxo). No entanto o problema ainda continua levando a outras especulações como a do famoso “gravitational cloaking”, um fenômeno conhecido da Ótica onde, usando um arranjo apropriado de lentes, é possível fazer desaparecer um objeto colocado atrás delas ¹. Vamos mostrar aqui de maneira relativamente simples como o paradoxo pode ser evitado considerando-se o modelo da Universo com Big-Bang. Definamos como $L(t)$ a luminosidade média das galáxias e $n(t)$ sua densidade. Temos assim que o número total dN de galáxias que se encontram numa casca esférica entre r_{em} e $r_{em} + dr_{em}$ no instante t_{em} vale

$$dN = n(t_{em}) 4\pi R^2(t_{em}) r_{em}^2 \frac{R(t_{em}) dr_{em}}{\sqrt{1 - kr_{em}^2}} \quad (\text{I.1})$$

Esta expressão é para a métrica de FLRW o que a expressão

$$dN = n(t_{em}) 4\pi r_{em}^2 dr_{em} \quad (\text{I.2})$$

é para a métrica Euclideana. Ou seja

$$\begin{aligned} 4\pi R^2(t_{em}) r_{em}^2 &= \text{área da superfície da esfera de raio } R(t) r, \\ \frac{R(t_{em})}{\sqrt{1 - kr_{em}^2}} dr_{em} &= \text{incremento da distância na direção radial.} \end{aligned}$$

Uma vez que a luminosidade média no instante t_{em} é $L(t_{em})$ a luminosidade total L_{em} das galáxias que se encontram nesta casca vale

$$\begin{aligned} L_{em} &= L(t_{em}) \times dN \\ &= L(t_{em}) \times n(t_{em}) 4\pi R^2(t_{em}) r_{em}^2 \frac{R(t_{em}) dr_{em}}{\sqrt{1 - kr_{em}^2}} \quad (\text{I.3}) \end{aligned}$$

¹ O termo vem do inglês *cloak*, isto é um manto com o qual se cobre o corpo, incluindo a cabeça. Segundo esta idéia, parte da matéria do Universo não é observável pois as lentes gravitacionais podem, de maneira semelhante à óptica, esconder parte do universo visível de nós. A estimativa é que 1% da massa bariônica seja invisível. Um artigo recente que trata deste assunto é o de I. Smolyaninov, *Phys. Rev. D* **97** (2018), 104008.

Usando agora a equação (22.9) para o fluxo de luminosidade $d\ell(t_o)$ discutida em aula temos finalmente²:

$$d\ell(t_o) = \frac{4\pi n(t_{em}) R^3(t_{em}) r_{em}^2 L(t_{em}) dr_{em}}{\sqrt{1 - kr_{em}^2}} \frac{R^2(t_{em})}{4\pi r_{em}^2 R^4(t_o)} \quad (I.4)$$

(a) Mostre que esta expressão pode ser reduzida para

$$d\ell(t_o) = \frac{c n(t_{em}) R^4(t_{em}) L(t_{em}) dt_{em}}{R^4(t_o)} \quad (I.5)$$

[Dica: estamos lidando com um sinal que se propaga radialmente. Partindo da métrica de FLRW para $d\phi = d\theta = 0$, ache uma relação entre $R(t_{em})$, dr_{em} , $\sqrt{1 - kr_{em}^2}$ e $c dt_{em}$ e substitua na expressão (4) acima.]

(b) Uma consequência interessante desta forma de escrever é que eliminamos a integração sobre a calota e a substituímos por uma integração sobre o tempo. Se você tivesse que explicar para uma pessoa que estas duas coisas são equivalentes, como você explicaria?

A equação (5) representa o fluxo luminoso observado hoje (t_o) emitido em t_{em} durante um intervalo de tempo dt_{em} . Se quisermos obter o fluxo desde o início do Universo t_{init} até o dia de hoje basta integramos esta equação

$$\ell(t_o) = \frac{c}{R^4(t_o)} \int_{t_{init}}^{t_o} n(t_{em}) R^4(t_{em}) L(t_{em}) dt_{em} \quad (I.6)$$

Nesta expressão estão incluídas contribuições de galáxias próximas para as quais $t_{em} \approx t_o$ bem como galáxias distantes, para as quais $t_{em} \approx t_{init}$.

Com este resultado podemos nos convencer que o paradoxo de um céu noturno claro – como propugna a teoria Newtoniana para um universo infinitamente grande – na verdade não existe na métrica de FLRW mesmo que para isso não consideremos a luz que é absorvida no trajeto até nós. Para facilitar as contas, tomemos a hipótese que todas as estrelas e galáxias existam desde o início do Universo (o que sabemos não ser verdade, mas isto não altera o resultado). Uma vez que na métrica de FLRW as partículas constituintes não mudam de coordenada, o número de galáxias dN é constante e portando $dN(t_o) = dN(t_{em})$. Escrevendo estas expressões de dN na forma da equação (1) e cancelando os termos que não dependem do tempo ficamos com

$$n(t_{em}) R^3(t_{em}) = \text{constante} = n(t_o) R^3(t_o) \quad (I.7)$$

Substituindo este resultado na integral (6) ficamos finalmente com

$$\ell(t_o) = \frac{c n(t_o)}{R(t_o)} \int_{t_{init}}^{t_o} R(t_{em}) L(t_{em}) dt_{em} \quad (I.8)$$

² A equação da luminosidade está nas notas da aula 28 no Moodle. A equação é fácil de entender pois à medida que a superfície da esfera cresce, a densidade de fótons decai com o aumento da área, pois a área cresce com $(Rr)^2$. O número de fótons permanece constante.

Deste resultado, podemos concluir que num Universo com Big-Bang, $R(t_{init}) = 0$ e, se assumirmos a hipótese que a luminosidade média L das galáxias é constante, ou mesmo se assumirmos a condição mais fraca que $L(t_{init}) < \infty$, a integral acima converge, mesmo desconsiderando qualquer atenuação da luminosidade devido à absorção da luz³. Mesmo que o Universo tivesse um passado infinito, ainda assim a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t_{em}) L(t_{em}) dt_{em}$ convergiria desde que $R(t_{em}) L(t_{em}) t_{em} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow -\infty$.

³ O segundo texto que anexo a esta avaliação, do Harrison, leva em conta a atenuação da luz.

Problema 2. O desvio para o vermelho cosmológico e a dificuldade de detectá-lo.

O desvio para o vermelho cosmológico devido à expansão do Universo vale

$$z = H_0 (t_0 - t_{em}) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_{em})^2, \quad (\text{I.9})$$

como discutico nas notas de aula. Na relatividade restrita o fator z pode ser explicado pelo efeito Doppler relativístico

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_{em}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (\text{I.10})$$

onde v é a velocidade de fuga de galáxias

$$v_{em} = H(t_{em}) d_{em} \quad (\text{I.11})$$

num espaço de Minkowski, e que portanto não se expande. A distância d_{em} é a distância da galáxia no momento da emissão e vale, na TRE

$$d_{em} = c(t_0 - t_{em}). \quad (\text{I.12})$$

(a) Usando a definição $z = \lambda_o/\lambda_{em} - 1$ (equação 21.22 das notas de aula) mostre que para velocidades $v \ll c$ temos

$$z = \frac{v}{c} + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \quad (\text{I.13})$$

Esta é a versão da TRE para z .

Agora, se a expansão fosse devido apenas à velocidade de recessão das galáxias, poderíamos relacionar diretamente v_{em} com a constante de Hubble e obter da equação (13) uma expressão para o desvio para o vermelho das galáxias distantes. Para a expansão em série de $H(t_{em})$ em torno do tempo t_0 temos

$$H(t_{em}) = H(t_0) + (t_{em} - t_0)\dot{H}(t_0) + \dots = H_0 + (q_0 + 1)H_0^2(t_0 - t_{em}) \quad (\text{I.14})$$

onde para passar da penúltima para a última parte da equação usamos

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) = \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\ddot{R}}{R} - H^2 = -(q + 1)H^2 \quad (\text{I.15})$$

(b) Usando a expressão (11), (12) e (14), expresse $\frac{v_{em}}{c}$ como função de H_0 até segunda ordem em $(t_0 - t_{em})$.

(c) Use agora a expressão obtida no ítem anterior para v_{em}/c e substitua em (13), mostrando que

$$z = H_0(t_0 - t_{em}) + \left(q_0 + \frac{3}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_{em})^2 \quad (\text{I.16})$$

O que você acabou de mostrar acima é a expressão do fator z das galáxias distantes considerando que esta grandeza surge do efeito Doppler, que está em última instância relacionado à dilatação do tempo. Portanto, a conclusão que tiramos comparando o z cosmológico (9) com o z da Relatividade Restrita (16) é que os dois só são diferentes em termos de ordem $(v/c)^2$, razão pela qual historicamente muitos dos resultados da TRG só puderam ser verificados muito depois de Einstein ter proposto a teoria. Foram necessários décadas para que a precisão das medidas pudessem diferenciar os 2 efeitos. As galáxias tem movimento próprio e por isso parte do seu desvio para o vermelho é causado pelo efeito Doppler relativístico.

J

Coordenadas e distâncias

Nosso objetivo é explorar um pouco mais a diferença entre coordenadas e as distâncias medidas em um espaço curvo. Por uma questão de familiaridade, vamos discutir a métrica de Schwarzschild como exemplo ilustrativo.

J.1 A métrica de Schwarzschild

Começemos com uma pergunta: por que, quando igualamos a métrica interior e exterior de Schwarzschild na superfície de uma estrela de raio r_o , ou seja a métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r \geq r_o) \quad (\text{J.1})$$

e a métrica

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - R^2(\tau) \left[\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (r' \leq r'_o) \quad (\text{J.2})$$

dizemos que a área da superfície da estrela vale

$$A = 4\pi r_o^2 \quad \text{ou} \quad A = 4\pi [R(\tau)r_o]^2 \quad (\text{J.3})$$

e não usamos na última expressão a fórmula

$$A = 4\pi \left[\frac{R^2(\tau)r_o'^2}{1 - kr_o'^2} \right] \quad (\text{J.4})$$

que nos parece ser a fórmula correta? Existe uma diferença importante entre coordenadas e distâncias em métricas não planas. Em métricas planas, em coordenadas esféricas por exemplo, podemos definir a [coordenada r](#) como sendo igual à [distância da origem até o ponto de coordenada r](#). Em espaços curvos isso não é verdade. Vamos discutir isto mais detalhadamente considerando a métrica de Schwarzschild, onde sabemos que o raio de Schwarzschild $r_S = 2GM/c^2$ desempenha

um papel importantíssimo. Vamos seguir aqui a notação de grande parte dos livros de Relatividade Geral e definir o parâmetro m como sendo

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (\text{J.5})$$

e escrever a métrica exterior na forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{J.6})$$

Como dito acima, esta é a forma mais comum encontrada nos livros para a métrica de Schwarzschild. A grandeza m tem, obviamente, a dimensão de distância e o uso da letra m é para nos lembrar que o raio de Schwarzschild varia com a massa M do objeto, uma vez que as outras grandezas que entram na sua definição são constantes universais.

Primeiro, enfatizemos aqui o limite de aplicabilidade desta métrica. A métrica é estática e portanto em princípio podemos tomar t como variando entre $-\infty < t < \infty$. As variáveis θ e ϕ tem a mesma interpretação que as coordenadas esféricas no espaço plano e variam dentro dos conhecidos limites de $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Com a variável r devemos ter um pouco de cuidado. Há 2 possíveis limites inferiores para os valores que r pode ter: se o corpo de massa M tem um raio r_o maior que seu respectivo raio de Schwarzschild, ou seja, $r_o \geq r_S$, a métrica se aplica para qualquer r tal que $r_o \leq r \leq \infty$. Isto ocorre porque ao chegarmos à superfície do objeto, a métrica exterior (J.1) ou (J.6) deixa de ser válida e para $r < r_o$ passa a valer a métrica interior (J.2). No caso do raio r chegar à r_S sem que tenha atingido a superfície r_o , então temos um buraco negro e neste caso a métrica acima vale para $r_S \leq r \leq \infty$. Se quisermos continuar diminuindo r para além do evento horizonte, embora a métrica continue sendo exterior, ela não pode ser mais expressa pelas formas acima em função da singularidade matemática em $r = r_S$. Neste caso temos que expressar (J.1) em termos de variáveis apropriadas (Kruskal-Szekeres ou Eddington-Finkelstein).

J.1.1 A diferença entre a distância dR e o incremento dr de coordenadas

Existe uma certa confusão, natural pelo fato de estamos acostumados a lidar com espaços planos, entre a diferença infinitesimal entre duas coordenadas

$$dr = r_2 - r_1 \longrightarrow r_2 = r_1 + dr \quad (\text{J.7})$$

e a distância dR medida na direção radial entre os dois pontos de coordenadas r_2 e r_1 num espaço curvo:

$$dR = \sqrt{g_{rr}} dr \neq dr. \quad (\text{J.8})$$

Na métrica de Schwarzschild $dR > dr$. Vamos tentar aqui entender melhor esta diferença. Uma vez que a métrica é estática, a parte temporal

e espacial podem ser “desacopladas”, ou seja, as coordenadas espaciais tem uma “permanência” no sentido que à medida que o tempo passa, as coordenadas (r, θ, ϕ) representam sempre o mesmo ponto do espaço. Isto não ocorre em métricas não estáticas. Como a métrica de Schwarzschild tem esta propriedade de permanência, tomemos um $t = \text{constante}$ e imaginemos então a superfície tridimensional na qual o elemento de linha vale

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{J.9})$$

Esta superfície tem a geometria de uma esfera de raio r imersa em em espaço Euclideano e de maneira análoga ao \mathbb{R}^3 , as distâncias tangenciais ($r = \text{constante}$) valem, no espaço de Schwarzschild

$$dL = r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{J.10})$$

que vem naturalmente do elemento de linha dL^2 sobre a superfície

$$dL^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{J.11})$$

Agora, o que acontece com as distâncias radiais para θ e ϕ constantes? Para distâncias radiais, segundo a métrica (J.6) para $t = \text{constante}$, temos:

$$dR = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr \quad (\text{J.12})$$

e portanto dr não é uma medida de distâncias radiais como no espaço plano. Esta distinção é muito importante pois por exemplo superfície da esfera de raio r é dada por

$$A = 4\pi r^2 \quad (\text{J.13})$$

e não por

$$A = 4\pi R^2 \quad (\text{J.14})$$

onde R mede a distância da origem ao ponto de coordenada R . Na verdade no espaço de Schwarzschild, se usarmos a métrica exterior, não faz sentido calcularmos

$$R = \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr \quad (\text{J.15})$$

pois a métrica não é definida para $r < r_S$ no caso de um buraco negro ou $r < r_o$ para outros corpos. Portanto a área $A = 4\pi R^2$ nem sentido faz. Esta aparente incompatibilidade pode ser melhor entendida na figura abaixo, onde estamos usando a representação de Flamm para a superfície bidimensional $t = \text{constante}$, $\theta = \pi/2$. Os círculos C_1 e C_3 representam superfícies que têm a geometria de uma esfera de raio r e $r + dr$ no espaço Euclideano, e C_2 e C_4 duas esferas vizinhas de raio r

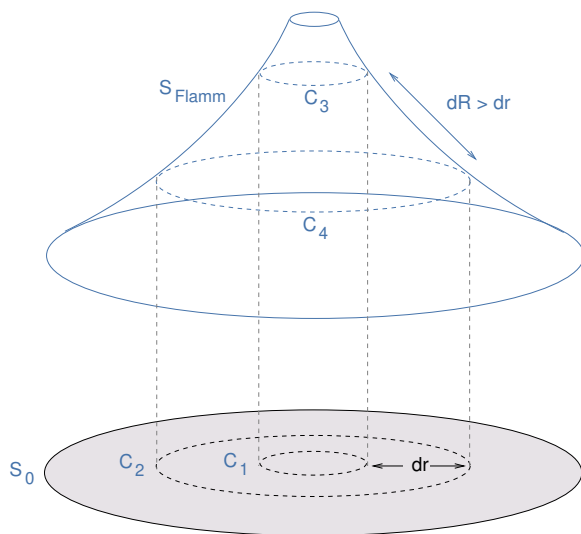


Figura J.1: Representação gráfica das distâncias radiais no espaço de Schwarzschild. Esta é a representação de Flamm, onde se fixa o valor de θ para efeito de visualização. Isto está discutido nas notas de aula.

$r + dr$ no espaço de Schwarzschild. As esferas são idênticas, mas só no espaço Euclidiano estas esferas distam de dr uma da outra, ao passo que no espaço de Schwarzschild elas distam dR . Note porém que as áreas das esferas são dadas por $A = 4\pi r^2$ e $A = 4\pi (r + dr)^2$ tanto no espaço Euclidiano quanto no espaço de Schwarzschild!

Para visualizar isto mais facilmente vamos pensar na superfície da Terra, onde seres bidimensionais sobre um paralelo medem seu perímetro (uma circunferência) sobre a superfície. No caso ilustrado na figura abaixo, eles obterão um resultado igual à $2\pi r$ e não $2\pi R$. Isto é típico de superfícies curvas.

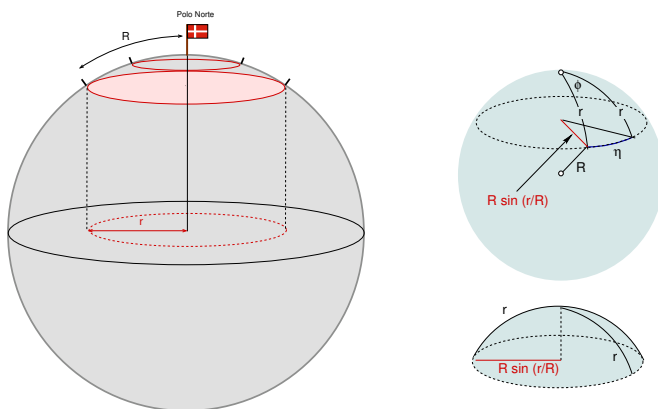


Figura J.2: O perímetro de um paralelo sobre a superfície da Terra vale $2\pi r$ e não $2\pi R$, onde R é a distância do paralelo até o polo norte. O mesmo ocorre no espaço de Schwarzschild. A figura à direita foi usada nas notas de aula quando discutimos curvatura e tem apenas efeito ilustrativo. Note que as letras usadas para designar distâncias no lado esquerdo da figura não tem relação com a nomenclatura da figura à direita.

Por isso é importante, em se tratando de Relatividade Geral, lembrarmos que entre duas coordenadas r e $r + dr$ não existe uma distância física mensurável dr mas sim uma distância dada por $dR = \sqrt{g_{rr}}dr$. O caso de métricas não estáticas complica mais ainda o problema. É por este motivo que quando assumimos que a métrica interior e exterior devem se encontrar na superfície de raio r_0 da estrela e reproduzir os mesmos resultados físicos a condição que a superfície da esfera seja dada por

$$A = 4\pi r_0^2 = 4\pi(r'_0 R)^2 \quad (J.16)$$

é a expressão correta dos valores da área, quer usemos a métrica externa, quer usemos a interna. A expressão $(1 - kr'^2)^{-1/2} R(t)r$ só tem sentido em processos de medida de distância e a coordenada r_0 da estrela não representa a distância do centro da estrela à superfície para um observador interno.

Isto é um pouco análogo à numeração de prédios numa rua embora no Brasil a analogia seja problemática: isto porque no Brasil a numeração das casas é a distância da casa medida desde o início da rua, usando números pares para um lado e ímpares para o outro lado. Portanto no Brasil é como se a a relação entre o número do imóvel e distância fossem um espaço euclidiano. Isto vale também para quase todo o continente americano, com poucas exceções.

Na Alemanha, por exemplo, a numeração é sequencial e não tem relação com a distância entre as casas ou seu posicionamento em relação ao início da rua. O que ainda é pior é que a contagem começa um lado da rua e vai sequencialmente até o fim da mesma. Dali é feita a continuação do outro lado na direção contrária, voltando ao ponto de partida ¹. Assim entre os prédios de números 78 e 79 pode haver no mínimo alguns poucos metros (a distância entre as portas) a algumas dezenas de metros, dependendo do tamanho do prédio. Nesta analogia, a relação número do imóvel e distância é típica de um espaço curvo.

¹ Na Alemanha e alguns países da Europa é comum que a casa oposta a de número 1, do outro lado da rua, tenha um número 62, por exemplo.

